Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal MA1102-2024-2

Control 3 - Primavera 2024

1. Considere la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
   a) (1 punto) Pruebe que el vector
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
   es un vector propio de A. Calcule el valor propio asociado.
   b) (1 punto) Sabiendo que $\lambda = -2$ es valor propio, calcule la dimensión del espacio propio, es decir $dim(Ker(A+2\mathbb{I}))$, donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad de tamaño 3×3.
   c) (4 puntos) Justifique que $\mathbb{R}^n$ tiene una base ortonormal de vectores propios de A y calcule una usando el método de Gram-Schmidt.

2. *a*) (3 puntos) Determine todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ de manera que
$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   sea diagonalizable.
   b) (3 puntos) ¿Cuáles de las siguientes matrices son diagonalizables? ¿por qué?
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

3. *a*) (2 puntos) Sean A, B, Q matrices reales de tamaño $n \times n$ y supondremos que Q es invertible y que $Q^t = Q^{-1}$. Además supondremos que $A = QBQ^t$ y que $\mathbb{R}^n$ tiene base ortonormal de vectores propios de B. Pruebe que $\mathbb{R}^n$ también tiene una base ortonormal de vectores propios de A.
   b) (2 puntos) Pruebe que si A es diagonalizable y todos sus valores propios son distintos de cero, entonces A es invertible y A^{-1} es diagonalizable.
   c) (2 puntos) Supongamos que A es una matriz real de tamaño $n \times n$. Pruebe que el polinomio característico de la matriz $A + A^t$ tiene todas sus raíces reales y que $A + A^t$ es diagonalizable.

Tiempo del control 3 horas.