Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal MA1102-2024-2

# Control 3 - Primavera 2024

1. Considere la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   *a*) (1 punto) Pruebe que el vector
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
   es un vector propio de $A$. Calcule el valor propio asociado.

   *b*) (1 punto) Sabiendo que $\lambda = -2$ es valor propio, calcule la dimensión del espacio propio, es decir $dim(Ker(A+2\mathbb{I}))$, donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad de tamaño $3 \times 3$.

   *c*) (4 puntos) Justifique que $\mathbb{R}^n$ tiene una base ortonormal de vectores propios de $A$ y calcule una usando el método de Gram-Schmidt.

**Solución:**

*a*) Basta verificar que $Av = \lambda v$ [**0.3 ptos. por calcular $Av$ y 0.2 ptos. por reconocer que $Av = lambdav$**]. (pueden haberlo hecho directamente con $= 4$ dar de ambas formas el puntaje) En efecto,

$$\begin{aligned} Av &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} && \text{(por álgebra de matrices)} \\ &= 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{(por propiedad del producto escalar)} \end{aligned}$$

Por definición de valor propio se concluye que 4 es un valor propio, pues $v$ no es el vector cero [**0.3 ptos. por decir que 4 es el valor propio y 0.2 por decir que $v$ no es cero**].

*b*) La dimensión del espacio propio asociado a $-2$ se obtiene calculando la dimensión del núcleo de la matriz $A + 2\mathbb{I}$ que está dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(por álgebra de matrices)}$$

[**0.3 ptos. por realizar el cálculo**].

*Primera forma:* Como todas las columnas de esta matriz son iguales, su rango es 1. [**0.3 ptos. por determinar el rango**]. El Teorema del Núcleo e Imagen implica que la dimensión de su núcleo es $3 - 1 = 2$ [**0.4 ptos. por la aplicación del teorema mencionado**].

*Segunda forma:* Al escalonar la matriz $A + 2\mathbb{I}$ se obtiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**[0.2 ptos. por escalonar]**. De aquí se deduce que hay dos variables libres **[0.2 ptos. por reconocer variables libres]**. Esto equivale a que la dimensión del núcleo de $A + 2\mathbb{I}$ es dos **[0.3 ptos. por justificar la relación entre las variables libres y la dimensión]**.

*c*) De acuerdo a un resultado de cátedra para matrices simétricas, sabemos que $\mathbb{R}^n$ tiene una base de vectores propios de $A$, pues $A$ es simétrica **[0.5 ptos. por mencionar el resultado y 0.5 ptos. por mencionar que $A$ es simétrica]**.

Para encontrar la base pedida basta con encontran una base ortonormal para cada espacio propio, pues los espacios propios asociados a valores propios distintos son ortogonales **[0.5 ptos. por mencionar el resultado]**.

El espacio propio asociado a 4 está generado por $v$ de modo que una base ortonormal del mismo está formada por

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

**[0.5 ptos. por obtener $v_1$]**.

Por su parte, una base para el espacio propio asociado a $-2$ se obtiene del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, asignando a $x_2$ el valor cero se obtiene el vector

$$v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Haciendo lo mismo para la variable $x_3$ se obtiene el vector

$$v_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0. \end{pmatrix}$$

**[0.5 ptos. por obtener ambos vectores $v_2'$ y $v_3'$]**.

Dado que los vectores no son ortogonales, pues su producto punto (escalar) no es cero, aplicamos el procedimiento pedido a la base $\{v_2', v_3'\}$. Para ello calculamos

$$u = v_3' - \frac{((v_3')^T v_2')v_2'}{(v_2')^T v_2'}$$

Reemplazando por los vectores obtenidos nos queda que

$$(v_2')^T v_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$$

,

$$(v_3')^T v_2' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$$

y entonces $u$ vale:

$$v_3' - v_2'/2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Así, los vectores de la base ortonormal del espacio propio asociado a $-2$ son:

$$v_2 = \frac{v_2'}{\sqrt{(v_2')^T v_2'}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0. \end{pmatrix}$$

y

$$v_3 = u/\sqrt{u^T u} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} / \sqrt{3/2}$$

Por lo tanto, la base pedida es $\{v_1, v_2, v_3\}$. [**0.3 ptos. por obtener $v_2$, 1.0 pto. por obtener $v_3$ y 0.2 ptos. por concluir**].

**Indicaciones para la corrección:**

- En la parte b) si se usa escalonamiento y se menciona que, como hay dos variables libres el espacio es de dimensión 2, entonces asignar el puntaje completo [**0.2+0.3=0.5 ptos.**]

2. *a*) (3 puntos) Determine todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ de manera que

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sea diagonalizable.

*b*) (3 puntos) ¿Cuáles de las siguientes matrices son diagonalizables? ¿por qué?

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

*a*) Por ser $A$ una matriz triangular superior, sus valores propios están en su diagonal [**0.3 ptos.**]. Estos son $a, -1$ y $2$ [**0.3 ptos.**]. Cuando $a \notin \{-1, 2\}$ todos los valores propios de $A$ son distintos y por resultado de cátedra la matriz es diagonalizable [**0.3 ptos.**].

Para $a \in \{-1, 2\}$ la matriz $A$ tiene sólo dos valores propios. Será diagonalizable si la multiplicidad geométrica es igual a la multiplicidad algebraica, para cada valor propio [**0.3 ptos.**].

Para $a = -1$ el espacio propio $W_2$ tiene dimensión 1 y el espacio propio $W_{-1}$ corresponde al conjunto solución de la ecuación $(A + \mathbb{I})x = 0$, para $x^T = (x_1, x_2, x_3)$ [**0.3 ptos.**]. De aquí, $x_3 = 0$ y $x_2 = 0$ por lo que el espacio tiene dimensión 1 [**0.3 ptos.**]. Se concluye que $A$ no es diagonalizable pues la multiplicidad algebraica de $-1$ es 2 [**0.3 ptos.**].

Para $a = 2$ el espacio propio $W_{-1}$ tiene dimensión 1 y el espacio propio $W_2$ corresponde al conjunto solución de la ecuación $(A - 2\mathbb{I})x = 0$, para $x^T = (x_1, x_2, x_3)$ [**0.3 ptos.**]. De aquí, $x_2 = 0$, por lo que el espacio tiene dimensión 2 [**0.3 ptos.**]. Se concluye que $A$ sí es diagonalizable pues la multiplicidad algebraica de 2 es 2 [**0.3 ptos.**].

*b*) La matriz $B$ es triangular superior. Un resultado de cátedra muestra que, entonces sus valores propios están en la diagonal [**0.5 ptos.**]. Así, los valores propios de $B$ son $1, 2$ y $3$ [**0.2 ptos.**]. Un resultado de cátedra muestra que una matriz de tamaño $n \times n$ con $n$ valores propios distintos es diagonalizable [**0.5 ptos.**]. Como $B$ cumple esto, es diagonalizable [**0.3 pts.**].

La matriz $C$ es simétrica. Un resultado de cátedra muestra que $C$ es diagonalizable [**1.5 ptos.**].

**Indicaciones para la corrección:**

- 

3. *a*) (2 puntos) Sean $A, B, Q$ matrices reales de tamaño $n \times n$ y supondremos que $Q$ es invertible y que $Q^t = Q^{-1}$. Además supondremos que $A = QBQ^t$ y que $\mathbb{R}^n$ tiene base ortonormal de vectores propios de $B$. Pruebe que $\mathbb{R}^n$ también tiene una base ortonormal de vectores propios de $A$.

   *b*) (2 puntos) Pruebe que si $A$ es diagonalizable y todos sus valores propios son distintos de cero, entonces $A$ es invertible y $A^{-1}$ es diagonalizable.

   *c*) (2 puntos) Supongamos que $A$ es una matriz real de tamaño $n \times n$. Pruebe que el polinomio característico de la matriz $A + A^t$ tiene todas sus raíces reales y que $A + A^t$ es diagonalizable.

**Solución:**

*a*) Por resultado de cátedra, la existencia de una base ortonomal de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de $B$ significa que existen matrices $P$ y $D$, con $P$ invertible y $D$ diagonal, y donde la inversa de $P$ es $P^T$, tales que $B = PDP^T$ [**0.3 ptos. por mencionar el resultado**].

De esta forma,

$$\begin{aligned} A &= Q(PDP^T)Q^T && \text{(por álgebra de matrices)} \\ &= (QP)D(P^TQ^T) && \text{(por propiedad de la trasposición)} \\ &= (QP)D(QP)^T \end{aligned}$$

[**0.3 ptos. por el desarrollo**]

La matriz $QP$ es invertible pues es el producto de dos matrices invertibles [**0.4 ptos.**]. Calculando $C = (QP)^T(QP)$ nos queda

$$\begin{aligned} C &= (QP)^T(QP) && \text{(por propiedad de la trasposición)} \\ &= (P^TQ^T)(QP) && \text{(asociando)} \\ &= P^T(Q^TQ)P && \text{(por } Q^TQ = \mathbb{I}) \\ &= P^TP && \text{(por } P^TP = \mathbb{I}) \\ &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

[**0.3 ptos. por el desarrollo**]

Por resultado de cátedra se concluye que la inversa de $QP$ es $(QP)^T$ [**0.4 ptos.**]

Se concluye que $\mathbb{R}^n$ tiene una base de vectores propios de $A$ [**0.3 ptos.**]

*b*) Por ser $A$ diagonalizable, existen matrices $P$ y $D$, con $P$ invertible y $D$ diagonal, tales que $A = PDP^{-1}$ [**0.3 ptos.**].

Los valores propios de $A$ están en la diagonal de $D$[**0.3 ptos.**].

Como cero no es valor propio, se tiene que $D$ es invertible[**0.3 ptos.**]. Con esto $A$ es invertible, pues es el producto de matrices invertibles [**0.3 ptos.**]. Además,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (PDP^{-1})^{-1} && \text{(por propiedad de la inversa)} \\ &= (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} && \text{(por propiedad de la traspuesta e inversa)} \\ &= (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} \\ &= PD^{-1}P^{-1} \end{aligned}$$

[**0.2 ptos. por el desarrollo**].

Se sabe que la inversa de una matriz diagonal es diagonal [**0.3 ptos.**]. También se sabe que la escritura anterior muestra que $A^{-1}$ es diagonalizable [**0.3 ptos.**].

*c*) La matriz $A + A^T$ es simétrica, con coeficientes reales, ya que $A$ y su transpuesta son matrices reales. En efecto,

$$\begin{aligned}
(A + A^T)^T &= A^T + (A^T)^T && \text{(por propiedad de la traspuesta)} \\
&= A^T + A && \text{(por propiedad de la traspuesta)} \\
&= A + A^T && \text{(por algebra de matrices)}
\end{aligned}$$

[**0.4 ptos. por el desarrollo y 0.3 ptos. por cada uso de la propiedad de la traspuesta**].

Por resultado de cátedra se concluye que $A + A^T$ es diagonalizable y que su polinomio característico tiene todas sus raíces reales. [**1.0 pto.**]

**Indicaciones para la corrección:**

- En la parte a) si se dice que $A$ o $B$ es simétrica, entonces debe justificarse con el resultado correspondiente. No hacerlo, no otorga puntaje.
- En la parte b), si se dice que como cero no es valor propio, entonces $A$ es invertible, asignar puntaje completo [**0.3+0.3=0.6**].

Tiempo del control 3 horas.