Control 2 - Otoño 2024

P1. Considere $L : \mathbb{R}^4 \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ la función dada por $L\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b & c \\ d & a+b \end{pmatrix}$.

a) (1 p) Pruebe que L es transformación lineal.

b) (2 p) Calcule M la matriz representante de L con respecto a las bases: $\mathcal{A}$ en la partida y $\mathcal{B}$ en la llegada, donde

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) (3 p) Dé bases del núcleo de L, esto es $Ker(L)$ y de la imagen de L, es decir $Im(L)$. Calcule las dimensiones de $Ker(L)$ e $Im(L)$. ¿Es L inyectiva?, ¿Es L epiyectiva?, justifique.

Solución:

a) Basta verificar que $\forall x, x' \in \mathbb{R}^4$, $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, se tiene que $L(\lambda x + \lambda' x') = \lambda L(x) + \lambda' L(x')$ [**0.2 ptos. por dar caracterización de linealidad o dar muestras (implícitamente) de conocerla**]. En efecto,

$$\begin{aligned}
L(\lambda x + \lambda' x') &= L\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda' x_1' \\ \lambda x_2 + \lambda' x_2' \\ \lambda x_3 + \lambda' x_3' \\ \lambda x_4 + \lambda' x_4' \end{pmatrix}\right) && \text{(por álgebra de matrices)} \\
&= \begin{pmatrix} (\lambda x_1 + \lambda' x_1') + (\lambda x_2 + \lambda' x_2') & \lambda x_3 + \lambda' x_3' \\ \lambda x_4 + \lambda' x_4' & (\lambda x_1 + \lambda' x_1') + (\lambda x_2 + \lambda' x_2') \end{pmatrix} && \text{(por definición de } L) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + x_2) + \lambda'(x_1' + x_2') & \lambda x_3 + \lambda' x_3' \\ \lambda x_4 + \lambda' x_4' & \lambda(x_1 + x_2) + \lambda'(x_1' + x_2') \end{pmatrix} && \text{(por aritmética en } \mathbb{R}) \\
&= \lambda \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_3 \\ x_4 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} x_1' + x_2' & x_3' \\ x_4' & x_1' + x_2' \end{pmatrix} && \text{(por álgebra matricial)} \\
&= \lambda L(x) + \lambda' L(x') && \text{(por definición de } L)
\end{aligned}$$

[**0.4 ptos. por las dos primeras igualdades y 0.4 ptos. por las tres últimas**]

b) Para calcular M debemos evaluar L en los elementos de la base $\mathcal{A}$ y expresarlos como combinación lineal de los elementos de la base $\mathcal{B}$ [**0.6 ptos. por explicar cómo obtener la matriz representante o dar muestra (implícitamente) de saber como hacerlo**]. Para determinar los escalares de cada combinación lineal, se puede resolver un sistema lineal. Se obtiene [**0.2 ptos. por cada combinación**

lineal correcta]:

$$L\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},$$

$$L\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},$$

$$L\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},$$

$$L\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

Luego, por definición de matriz representante, [**0.6 ptos. por explicitar M / 0.0 ptos. si obtienen la traspuesta**]

$$M=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&0&1&0\\-1&-2&-2&-1\\1&2&2&2\end{pmatrix}.$$

c) Primero estudiamos $Ker(L)$. Por definición de núcleo,

$$\begin{aligned}x\in Ker(L)&\iff L(x)=0 &&\text{(por definición de } Ker(\cdot))\\&\iff\begin{pmatrix}x_1+x_2&x_3\\x_4&x_1+x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}&&\text{(por definición de } L)\\&\iff x_2=-x_1\wedge x_3=x_4=0.\end{aligned}$$

[**0.3 ptos. por la 1era equivalencia (conocer la definición de $Ker(\cdot)$)**]
Luego, [**0.6 ptos. por encontrar el $Ker(\cdot)$ y/o un generador**]

$$Ker(L)=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\-x_1\\0\\0\end{pmatrix}:x_1\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\right\rangle.$$

Sigue que una base de $Ker(L)$ es

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}. \qquad \textbf{(0.3 ptos. por explicitar una base de } Ker(L)\textbf{)}$$

Luego, $dim(Ker(L))=1$ y L no es inyectiva (porque una transformación lineal es inyectiva ssi su núcleo tiene dimensión 0) [**0.3 ptos. por argumentar no inyectividad y dar dimensión**].

A continuación estudiamos $Im(L)$.

Primera forma: Por Teorema Núcleo Imagen y dado que conocemos la dimensión del núcleo de L, tenemos que $dim(Im(L)) = dim(\mathbb{R}^4) - dim(Ker(L)) = 4 - 1 = 3$. Como la dimensión del espacio de llegada es $4 > dim(Im(L))$, sigue que L no es epiyectiva [**0.3 ptos. por argumentar no epiyectividad**].

Por resultado visto, $Im(L)$ es el s.e.v. generado por L evaluada en los elementos de una base de la partida, por ejemplo $\mathcal{A}$ [**0.3 ptos. por explicitar una caracterización de $Im(\cdot)$ y/o conocer la definición de $Im(\cdot)$**]. En particular, evaluando L como en la parte a), sigue que

$$\begin{aligned} Im(L) &= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \qquad (\textbf{0.6 ptos. por encontrar generadores}) \\ &= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle. \end{aligned}$$

Como la dimensión de $Im(L)$ es 3, se tiene que una base de $Im(L)$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

[**0.3 ptos. por explicitar una base de $Im(L)$ y dar dimensión**].

Segunda forma: Podemos completar la base de $Ker(L)$ obtenida arriba (digamos que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una tal completación) y usar que sabemos que $\{L(v_1), L(v_2), L(v_3)\}$ (por Teorema Núcleo Imagen) [**0.3 ptos. por explicitar esta caracterización de $Im(\cdot)$ y/o conocer la definición de $Im(\cdot)$**]. Por ejemplo, tomando la unión de la base de $Ker(L)$ ya obtenida y la base canónica de $\mathbb{R}^4$, y extrayendo una base, se verifica que podemos elegir

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (\textbf{0.6 ptos. por completar base de } Ker(L))$$

Luego, una base de $Im(L)$ es

$$\{L(v_1), L(v_2), L(v_3)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sigue que $dim(Im(L)) = 3$ [**0.3 ptos. por explicitar una base de $Im(L)$ y dar dimensión**].
Como el codominio de L, es decir $M_{2,2}(\mathbb{R})$, tiene dimensión $4 > dim(Im(L))$, sigue que $Im(L) \neq M_{2,2}(\mathbb{R})$ y, por lo tanto, L no es epiyectiva [**0.3 ptos. por argumentar no epiyectividad**].

Tercera forma: Notar que,

$$\begin{aligned} Im(L) &= \{L(x) \colon x \in \mathbb{R}^4\} && \text{(por definición de imagen)} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_3 \\ x_4 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}^4 \right\} && \text{(por definición de } L) \\ &= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle && \text{(por definición de s.e.v. generado)} \end{aligned}$$

[**0.3 ptos. por la 1era igualdad (conocer la definición de $Im(\cdot)$) / 0.6 ptos. por encontrar generadores**]
Claramente, el conjunto generador de $Im(L)$ recién encontrado es linealmente independiente. Sigue que una base de $Im(L)$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y que tiene dimensión 3 [**0.3 ptos. por explicitar una base de** $Im(L)$ **y dar dimensión**].
Como el codominio de L, es decir $M_{2,2}(\mathbb{R})$, tiene dimensión $4 > dim(Im(L))$, sigue que $Im(L) \neq M_{2,2}(\mathbb{R})$ y, por lo tanto, L no es epiyectiva [**0.3 ptos. por argumentar no epiyectividad**].

Indicaciones para la corrección:

- En la parte a), podrían demostrar por separado que $L(x + x') = L(x) + L(x')$ y que $L(\lambda x) = \lambda L(x)$. Asignar **0.2 ptos.** por dar esta caracterización de linealidad.
- En la parte a), es correcto argumentar fijando $\lambda' = 1$.

P2. *a)* (3 p) Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuya matriz representante con respecto a la base canónica $\mathcal{C}$ en el espacio de partida y llegada es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcule N, la matriz representante de T, **usando matrices de cambio de base**, cuando la base en el espacio de partida y de llegada es

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Indicación: puede dejar expresada N como producto de matrices que calculó y/o sus inversas.

b) Sea U espacio vectorial de dimensión finita y $L : U \to U$ transformación lineal. En cada una de las siguientes afirmaciones diga si es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, justifique y en caso de ser falsa de un contraejemplo.

1) (1.5 p) Si $Ker(L) = \{0\}$, entonces L es biyectiva.
2) (1.5 p) Si $U = \mathbb{R}^2$ y M es la matriz representante de L con respecto a la base $\mathcal{A}$ en la partida y $\mathcal{B}$ en la llegada ($\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ arbitrarias), entonces $Ker(L) = Ker(M)$ donde $Ker(M) = \{x \in \mathbb{R}^2 : Mx = 0\}$.

Solución:

a) Sea P la matriz pasaje (o de cambio de base) de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica $\mathcal{C}$. Como en el espacio de llegada tenemos la base canónica, se tiene que P es la matriz cuyas columnas son los vectores en $\mathcal{B}$, esto es porque las coordenadas que debemos usar para escribir cada vector de $\mathcal{B}$ como combinación lineal de los vectores de la base canónica, coinciden con los coeficientes de dichos vectores, es decir, **0.6 ptos. por explicar el motivo por el cual P es la matriz pasaje**

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (\textbf{0.9 ptos. por explicitar la matriz pasaje})$$

Por resultado visto, la matriz pasaje (o de cambo de base) de la base canónica $\mathcal{C}$ en la base $\mathcal{B}$ es P^{-1}. [**1 ptos. por justificar que la inversa de P es la matriz de cambio de base de la canónica a $\mathcal{B}$**].
Por Teorema de Matriz Representante y Cambio de Base, $N = P^{-1}MP$ [**0.5 ptos. por dar la expresión correcta**].

b) 1) La afirmación es verdadera. En efecto, si $Ker(L) = \{0\}$, por resultado visto, L es inyectiva [**0.6 ptos. por establecer inyectividad de** L]. Para concluir, se puede argumentar de dos maneras que se detallan a continuación:

Primera forma: Por resultado visto, una transformación lineal entre espacios vectoriales de igual dimensión es inyectiva ssi es epiyectiva [**0.6 ptos. por invocar resultado**]. Sigue que la inyectividad de L implica que L es biyectiva [**0.3 ptos. por concluir**].

Segunda forma: Como $Ker(L) = \{0\}$, entonces $dim(Ker(L)) = 0$. Por Teorema Núcleo Imagen, sigue que $dim(U) = dim(Im(L))$ [**0.9 ptos. por usar TNI y determinar la dimensión de** $Im(L)$]. Como $Im(L) \subseteq U$ y resultado conocido, concluimos $Im(L) = U$ [**0.3 ptos.**], luego L es epiyectiva, lo que junto a la inyectividad implican que L es biyectiva [**0.3 ptos. por argumentar epiyectividad y concluir**].

2) La afirmación es falsa [**0.3 ptos.**] (salvo por el caso particular en que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son la base canónica, en este caso, de $\mathbb{R}^2$). Como contraejemplo, considerar

$$L(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

[**0.3 ptos. por definir L, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ siempre que L sea lineal y $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sean bases de $\mathbb{R}^2$**]
Se verifica que,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Ker(L) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \neq \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = Ker(M).$$

[**0.3 ptos. por calcular correctamente M, $Ker(L)$ y $Ker(M)$, para el ejemplo dado / 0.6 ptos. si $Ker(L) \neq Ker(M)$**]

Indicaciones para la corrección:

- En la parte a), descontar **0.3 ptos.** por cada columna de P mal calculada.
- En la parte a), dar **0.5 ptos.** si concluyen que $N = P^{-1}MP$.
- Hay una infinidad de contraejemplos para la parte b.2). Cualquiera que den, si es correcto, esta bien.

P3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Sean U y W dos subespacios vectoriales de V. Consideremos el conjunto de los pares ordenados $U \times W = \{(u, w) \colon u \in U,\ w \in W\}$, que con la suma y ponderación: para todo $u, \widetilde{u} \in U, w, \widetilde{w} \in W, \lambda \in \mathbb{R}$

$$(u, w) + (\widetilde{u}, \widetilde{w}) = (u + \widetilde{u}, w + \widetilde{w}), \qquad \lambda(u, w) = (\lambda u, \lambda w),$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con neutro $(0, 0)$. Sea $T : U \times W \to V$ dada por $T((u, w)) = 2u - w$.

a) (2 p) Demuestre que T es una función lineal.

b) (2 p) Sean $\mathcal{B}_U = \{u_1, u_2\}$ y $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2\}$ bases de U y W respectivamente. Se sabe que $\mathcal{B}_{U\times W} = \{(u_1, 0), (u_2, 0), (0, w_1), (0, w_2)\}$ es base de $U \times W$. Supongamos que $\mathcal{B}_V = \{u_1, u_2, w_1, w_2\}$ es base de V. Encuentre la matriz representante de T en las bases $\mathcal{B}_{U\times W}$ y $\mathcal{B}_V$.

c) (2 p) Si $V = U \oplus W$, demuestre que $Ker(T) = \{(0, 0)\}$.

Solución:

a) Basta verificar que $\forall (u, w), (\widetilde{u}, \widetilde{w}) \in U \times W, \forall \lambda, \widetilde{\lambda} \in \mathbb{R}$, se tiene que $T(\lambda(u, w) + \widetilde{\lambda}(\widetilde{u}, \widetilde{w})) = \lambda T((u, w)) + \widetilde{\lambda} T((\widetilde{u}, \widetilde{w}))$ [**0.5 pts. por dar caracterización de linealidad o dar muestras (implícitamente) de conocerla**]. En efecto,

$$\begin{aligned} T\big(\lambda(u, w) + \widetilde{\lambda}(\widetilde{u}, \widetilde{w})\big) &= T\big((\lambda u + \widetilde{\lambda}\widetilde{u}, \lambda w + \widetilde{\lambda}\widetilde{w})\big) \\ &\qquad \text{(por definición de suma y producto escalar en } U \times V \text{ [}\mathbf{0.5\ ptos.}\text{])} \\ &= 2(\lambda u + \widetilde{\lambda}\widetilde{u}) - (\lambda w + \widetilde{\lambda}\widetilde{w}) && \text{(por definición de } T\text{)} \\ &= \lambda(2u - w) + \widetilde{\lambda}(2\widetilde{u} - \widetilde{w}) && \text{(por álgebra vectorial [}\mathbf{0.5\ ptos.}\text{])} \\ &= \lambda T((u, w)) + \widetilde{\lambda} T((\widetilde{u}, \widetilde{w})) && \text{(por definición de } T \text{ [}\mathbf{0.5\ ptos.}\text{])} \end{aligned}$$

Sigue que T es lineal.

b) Para calcular la matriz representante pedida hay que evaluar T en los elementos de la base $\mathcal{B}_{U\times W}$ y expresar el resultado como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}_V$ [**0.6 ptos. por explicar cómo obtener la matriz representante o dar muestra (implícitamente) de saber como hacerlo**]. Se obtiene, [**0.2 ptos. por cada combinación lineal correcta**]

$$\begin{aligned}
T((u_1,0)) &= 2u_1 = 2u_1 + 0u_2 + 0w_1 + 0w_2,\\
T((u_2,0)) &= 2u_2 = 0u_1 + 2u_2 + 0w_1 + 0w_2,\\
T((0,w_1)) &= -w_1 = 0u_1 + 0u_2 - 1w_1 + 0w_2,\\
T((0,w_2)) &= -w_2 = 0u_1 + 0u_2 + 0w_1 - 1w_2.
\end{aligned}$$

Luego, por definición, la matriz representante pedida es [**0.6 ptos. por explicitar** M]:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Notar que

$$\begin{aligned}
(u,w)\in Ker(T) &\iff T((u,w)) = 0 && \text{(por definición de } Ker(T))\\
&\iff 2u - w = 0 && \text{(por definición de } T)\\
&\iff 2u = w && \text{(por álgebra vectorial)}
\end{aligned}$$

[**0.2 ptos. por la 1era equivalencia (conocer la definición de** $Ker(\cdot)$ **/ 0.2 ptos. por llegar a cualquiera de las dos últimas igualdades**]

Luego, si $(u,w)\in Ker(T)$, entonces $2u\in U$, $w\in W$, y $2u = w$. En particular $2u = w \in U\cap W$, por lo que $u,w\in U\cap W$ [**0.8 ptos. por concluir que** $u,w\in U\cap W$]. Por resultado visto, si $V = U\oplus W$, entonces $U\cap W = \{0\}$ [**0.4 ptos. por esta deducción**]. Sigue que $u = 0$ y $w = 0$, por lo que $(u,w) = (0,0)$. En resumen, $Ker(T)\subseteq \{(0,0)\}$. La inclusión reversa es directa. [**0.4 ptos. por concluir.**]

Indicaciones para la corrección:

- En la parte a), podrían demostrar por separado que $T((u,w)+(\widetilde{u},\widetilde{w})) = T((u,w)+T((\widetilde{u},\widetilde{w}))$ y que $T(\lambda(u,w)) = \lambda T((u,w))$. Asignar **0.5 ptos.** por dar esta caracterización de linealidad.
- En la parte a), es correcto argumentar fijando $\widetilde{\lambda} = 1$.

Tiempo: 3.0 hrs.