Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Álgebra Lineal Otoño 2024- Control 1
Septiembre 28, 2024

P1. Considere el sistema lineal $Ax = b$, con $A \in M_{4,4}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^4, b \in \mathbb{R}^4$, dado por

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 0x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 & = & 1 \\ x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 & = & 2 \\ x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 0x_4 & = & 1 \\ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \alpha x_4 & = & \beta \end{array}$$

donde α, β son parámetros reales.

(a) Encuentre todas las condiciones sobre α y β de modo que el sistema

- **I)** (1.5 puntos) No tenga solución.
- **II)** (1.5 puntos) Tenga infinitas soluciones.
- **III)** (1.5 puntos) Tenga solución única.

(b) (1.5 puntos) Indique bajo quï¿½ condiciones en α, la matriz A es invertible.

P2. (a) Considere el subconjunto U de $M_{3,2}(\mathbb{R})$ dado por

$$U = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}) : \, M \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \in M_{3,2}(\mathbb{R}) \right\}.$$

- **I)** (1.5 puntos) Pruebe que U es un subespacio vectorial de $M_{3,2}(\mathbb{R})$.
- **II)** (1.5 puntos) De una base de U y calcule la dimensión de U.

(b) (3 puntos) Sea V el espacio vectorial generado por los vectores $\{v_1, v_2\}$, es decir $V = \langle \{v_1, v_2\} \rangle$. Pruebe que si $\mathscr{W} = \{w_1, w_2, w_3\} \subseteq V$ entonces $\mathscr{W}$ es linealmente dependiente.

P3. (a) (3 puntos) Calcule la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) (3 puntos) Consideremos $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ con $n \geq m$. Supondremos que la matriz $A^t A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ es invertible y definamos $P = A(A^t A)^{-1} A^t$. Pruebe que

$$P(\mathbb{I} - P) = 0,$$

donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad de tamaño $m \times m$.

Tiempo del control 3 horas.