logofcfm-eps-converted-to.pdf

Pauta Control 1 - Primavera 2024

P1. Considere el sistema lineal $Ax = b$, con $A \in M_{4,4}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^4, b \in^4$, dado por

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 0x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 & = & 1 \\ x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 & = & 2 \\ x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 0x_4 & = & 1 \\ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \alpha x_4 & = & \beta \end{array}$$

donde α, β son parámetros reales.

a) Encuentre todas las condiciones sobre α y β de modo que el sistema:

1) (1.5 puntos) No tenga solución.
2) (1.5 puntos) Tenga infinitas soluciones.
3) (1.5 puntos) Tenga solución única.

b) (1.5 puntos) Indique bajo qué condiciones en α, la matriz A es invertible.

Pauta P1.

(a) Partimos escribiendo el sistema lineal de forma matricial: El Sistema a escalonar es:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha & | & \beta \end{bmatrix}$$

Escalonando:
Primero restamos la fila 1 a cada una de las otras filas:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha & | & \beta \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha & | & \beta \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha - 1 & | & \beta - 1 \end{bmatrix}$$

Le restamos la fila 2 a la fila 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha - 1 & | & \beta - 2 \end{bmatrix}$$

Le sumamos la fila 3 a la fila 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 2 & | & \beta - 2 \end{bmatrix}$$

Ahora ya podemos analizar el sistema:

1) Para que el sistema no tenga solución, es decir que sea incompatible, necesitamos que $\alpha = 2, \beta \neq 2$

2) Para que el sistema tenga infinitas soluciones necesitamos que la última fila sea cero, es decir $\alpha = 2, \beta = 2$, lo que deja la variable x_4 libre.

3) Para que el sistema tenga solución única $\alpha \neq 2$ lo que nos da una matriz escalonada sin ceros en la diagonal para cualquier elección de β.

[(4.5 pts): 1.5 puntos por obtener la matriz escalonada. Si el escalonamiento está incorrecto, restar un punto, pero hacer la corrección de las conclusiones con respecto al escalonamiento obtenido. En cada uno de I), II) y III), dar 0.5 puntos por determinar α y otros 0.5 por determinar β.]

(b) Para que la matriz A sea invertible $\alpha \neq 2$, lo que nos da una matriz triangular superior sin ceros en la diagonal cuando hacemos el escalonamiento.

[**(1.5 pts)**]

P2. *a)* Considere el subconjunto U de $M_{3,2}(\mathbb{R})$ dado por

$$U = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}) : \, M \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \in M_{3,2}(\mathbb{R}) \right\}.$$

1) (1.5 puntos) Pruebe que U es un subespacio vectorial de $M_{3,2}(\mathbb{R})$.

2) (1.5 puntos) De una base de U y calcule la dimensión de U.

b) (3 puntos) Sea $V = \langle \{v_1, v_2\} \rangle$. Pruebe que si $W = \{w_1, w_2, w_3\} \subseteq V$ entonces W es linealmente dependiente.

Pauta P2.

a) 1) $U = \{M \in M_{3,2} : M \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0\}$

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ luego

$$M \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & -a+b \\ c-d & -c+d \\ e-f & -e+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:
$a = b$; $c = d$; $e = f$
$M = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \\ e & e \end{pmatrix}$, $a, c, e \in \mathbb{R}$
Demostremos que U es s.e.v. (subespacio vectorial)

a' Debemos ver que $U \neq \emptyset$.
$M = 0 \in U$ La matriz cero pertenece a U

b' $M_1, M_2 \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$, por demostrar que $\lambda M_1 + M_2 \in U$ (U es cerrado bajo la suma y la multiplicación por escalar).

Sean $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ c_1 & c_1 \\ e_1 & e_1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & a_2 \\ c_2 & c_2 \\ e_2 & e_2 \end{pmatrix}$

$$\lambda M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + a_2 & \lambda a_1 + a_2 \\ \lambda c_1 + c_2 & \lambda c_1 + c_2 \\ \lambda e_1 + e_2 & \lambda e_1 + e_2 \end{pmatrix}$$

Luego $\lambda M_1 + M_2 \in U$.
La combinación lineal también pertenece a U.
Por lo que conclumos que U es subespacio vectorial de $M_{3,2}(\mathbb{R})$
IMPORTANTE: pueden hacerlo con uno o dos escalares.
También es correcto plantear:

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
$M_1 \cdot A = 0$
$M_2 \cdot A = 0$

$$(\lambda M_1 + M_2)A = \lambda M_1 A + M_2 A = 0$$

[a.I) (1.5 pts.) 0.3 puntos por verificar que U no vacío; 0.6 puntos por plantear una combinación lineal de las matrices de U; 0.6 por usar la definición de U para decir que la combinación lineal está en U.]

2) Para encontrar una base:
Notar que

$$M \in U \text{ ssi } M = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \\ e & e \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$M = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

luego

$$A = \{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \}$$

genera U.
Además, A es linealmente independiente, esto es claro, pues si $M = 0, a = b = c = 0$.
Por lo tanto, A es una base de U, y la dimensión de U es 3.
Otra forma de ver que son linealmente independientes es ver que ninguna de las tres se puede escribir como combinación lineal de las otras dos, pues en la coordenada donde tienen un 1 las otras tienen un cero.
[a.II) (1.5 pts.) 0.5 encontrar generador; 0.5 encontrar base/justificar l.i.; 0,5 determinar dimensión de U.]

b) Si $V = \langle \{u_1, u_2\} \rangle$ entonces

$$\dim V \leq 2$$

, de hecho si los vectores son linealmente independientes, como el conjunto genera tengo una base de V, y la dimensión es 2, de ser LD, la base tiene un vector o ninguno y las dimensión sería 1 o 0 respectivamente. (si deduce que $\dim V = 2$ descuentan 0.5p.)

Por un resultado del curso: cualquier conjunto generador que tiene cardinal ¿dim V es l.d. (linealmente dependiente), luego como $|W| = 3 > \dim V$, W es l.d. Para justificar que $\dim V \leq 2$ se puede usar que el cardinal de cualquier base es menor o igual al cardinal de un conjunto generador, y luego continuar con el mismo argumento para ver que W es l.d.

Otra forma: por definición:

$$w_1 = \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2$$

$$w_2 = \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2$$

$$w_3 = \alpha_3 u_1 + \beta_3 u_2$$

Sean λ, γ, $\delta \in \mathbb{R}$, no todos cero, tales que $\lambda w_1 + \gamma w_2 + \delta w_3 = 0$

$$(\lambda\alpha_1 + \gamma\alpha_2 + \delta\alpha_3)u_1 + (\lambda\beta_1 + \gamma\beta_2 + \delta\beta_3)u_2 = 0$$

Busquemos una posible solución para λ, γ, δ, no todos cero, imponiendo

$$\lambda\alpha_1 + \gamma\alpha_2 + \delta\alpha_3 = 0$$

$$\lambda\beta_1 + \gamma\beta_2 + \delta\beta_3 = 0$$

Notar que α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 son dados.
Sistema homogéneo de 2 ecuaciones y 3 incógnitas, luego tiene ∞ soluciones. Es decir, hay una solución distinta de $\lambda = \gamma = \delta = 0$.
Por lo tanto, w_1, w_2, w_3 son l.d.
[**(3.0 pts.) 1.5 pts. por $dim(V) \leq 2$; 0.5 citar resultado del curso; 1.0 por concluir la l.d.**]

P3.

a) (3 puntos) Calcule la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) (3 puntos) Consideremos $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ con $n \geq m$. Supondremos que la matriz $A^tA \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ es invertible y definamos $P = A(A^tA)^{-1}A^t$. Pruebe que

$$P(I - P) = 0,$$

donde I es la matriz identidad de tamaño $m \times m$.

Pauta P3.

a) Para calcular la inversa partimos con:

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

No es necesario especificar cada operación, pero:

$f_4 + f_1 \to f_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f_4 - f_2 \to f_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Escalonamos hacia arriba:
$-\frac{1}{2}f_4 - f_3 \to f_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$-\frac{1}{2}f_4 + f_1 \to f_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f_1 + f_2 \to f_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}f_4 \to f_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Luego la inversa de A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

[(3.0 pts.) (0.5 puntos) por plantear la matriz $(A|I)$; (1.0 punto) por obtener $(A'|B')$ con A' escalonada inferiormente; (1.0 punto) por obtener $(I|B'')$; (0.5 puntos) por concluir que B'' es la inversa de A.]

b) $A \in M_{m,n}$
Debemos probar que si A^tA es invertible, entonces

$$P = A(A^tA)^{-1}A^t$$

satisface

$$P(I-P) = 0$$

Por distributibidad del producto sobre la suma de matrices, tenemos:

$$P(I-P) = P - P^2$$

$$P - P^2 = A(A^tA)^{-1}A^t - A(A^tA)^{-1}(A^tA)(A^tA)^{-1}A^t = A(A^tA)^{-1}A^t - AI(A^tA)^{-1}A^t$$

$$= A(A^tA)^{-1}A^t - A(A^tA)^{-1}A^t = 0$$

[(3.0 pts.) 1.0 punto por usar la hipótesis sobre A^tA; 0.5 por distribuir; 1.0 por usar que la identidad es neutro; 0.5 por asociatividad.]