Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Álgebra Lineal Otoño 2023- Control 3
Diciembre 2, 2023

P1. 1) (3 puntos) Determine todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ de manera que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sea diagonalizable.

2) (3 puntos) ¿Cuales de las siguientes matrices son diagonalizables? ¿por qué?

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

P2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Pruebe que el polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4).$$

- (5 puntos) Calcule una base ortonormal de vectores propios de A

P3. Supongamos que A es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$.

(a) (2 puntos) Pruebe que si λ es un valor propio de A, de vector propio v, entonces $\lambda^2 + \lambda$ es valor propio de la matriz $A^2 + A$.

(b) (2 puntos) Pruebe que si A es diagonalizable también lo es $A^2 + A$.

(c) (2 puntos) Sea $\{w_1, ..., w_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ y supongamos que para cada $i \in \{1, ..., n\}$ existe $\lambda_i \geq 0$ tal que $Aw_i = \lambda_i w_i$. Sea P la matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, donde su columna j es w_j, para $j = 1, ...n$, esto es $P = [w_1 w_2 ... w_n]$, y F la matriz diagonal de tamaño $n \times n$ con $F_{i,i} = \sqrt{\lambda_i}$ para $i = 1, ..., n$.

Demuestre que $R = PFP^t$ es una matriz simétrica y $R^2 = A$.

Tiempo del control 3 horas.