C3 2023

P1. $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & b \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)^2 (2-\lambda)$

mult. alg.

Valores propios $\lambda_1 = 1$ $\quad n_1 = 2$

$\boxed{1 \text{ pto}}$ $\quad \lambda_2 = 2$ $\quad n_2 = 1$

El único problema para que A no sea diagonalizable es el espacio propio de $\lambda = 1$

$\lambda_1 = 1$

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El núcleo de $A - 1 \cdot I$ debemos escalonar la matriz $A - 1I$

$$A - 1 \cdot I \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Solución $z = 0$

$$\begin{cases} a = 0 & x, y \text{ libres} \\ a \neq 0 & y = 0 \quad x \text{ libre} \end{cases}$$

luego si $a \neq 0$ hay 1 variable libre $\Rightarrow 1 = m_1 < n_1 = 2$, 1 v. propio l. i.

No es necesario explicitarlo

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{1 \text{ pto}}$

No es diagonalizable

$a = 0$ dos variables libres

$m_1 = 2 = n_1$ y

Como $m_2 = 1 = n_1$ (Teo de Clases)

$\Rightarrow$ diagonalizable $\boxed{1 \text{ p}}$

Tambien se puede encontrar una base de vectores propios

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

base de vect. propios de

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 0$ $\quad A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(a = 0)$

z libre $\quad y = 0$

$x = 6z$

$$V = z \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Claramente v_1, v_2, v_3 son l.i.

$\Rightarrow$ diagonalizable.

P1.2:

$$|B-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 7 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)$$

Valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$
son todos simples (distintos)

$\Rightarrow$ B diagonalizable

(1.5 p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$ real simétrica

$\Rightarrow$ diagonalizable 1.5 p.

(Si falta real -0.5p)

P2 $(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right) - 1\cdot\left[(2-\lambda) - 1\right]$

$+ 1\left[1-(2-\lambda)\right]$

$= (2-\lambda)\left(3 - 4\lambda + \lambda^2\right) + 2(\lambda - 1)$

$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$

Por otro lado

$-(\lambda-1)^2(\lambda-4) = -\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right)$

$\cdot(\lambda-4) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$

está probado

1 pto.

dar puntaje parcial si hay

errores de cálculo máximo 0.5 puntos

P2.2: $\lambda = 1$ $n_1 = 2$ esperamos 2 vectores l. i.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

y, z libres $x = -y - z$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + z \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}$$

1.5 ptos

$\lambda = 4$ $n_2 = 1$

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1.5 & 1.5 \\ 0 & 1.5 & -1.5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol. z libre $y = z$

$$x = \frac{y+z}{2} = z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= v_3}$$

1.5 ptos

$v_1 \perp v_3 \quad v_2 \perp v_3$

debemos ortonormalizar

G-S para v_1 y v_2

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad 0.5$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1 \quad 0.5$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{6}} \qquad 0.5$$

dar puntaje parcial por errores.

base ortonormal

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\quad w_1 \qquad\qquad w_2 \qquad\qquad w_3$$

0.5 ptos

descontar 0.2
si olvida normalizar

P3

(a) $(A^2+A)v = A^2v + Av$

$= A(\lambda v) + \lambda v$

$= \lambda Av + \lambda v = \lambda^2 v + \lambda v$

$= (\lambda^2+\lambda)\, v$ $\boxed{2p}$

Como $v \neq 0 \Rightarrow \lambda^2+\lambda$
es v. p. de A^2+A

descontar 0.5 si no menciona.

(b) $A = PDP^{-1}$

$A^2 + A = (PDP^{-1})PDP^{-1} + PDP^{-1}$

$= P D^2 P^{-1} + P D P^{-1}$

$= P \underbrace{(D^2 + D)}_{\text{diagonal}} P^{-1}$ $\boxed{2p}$

Luego es diagonalizable

c) Notar que $w_1 - w_n$

son vectores propios de A

Como son una base A

es diagonalizable

$\Rightarrow A = P D P^{-1}$ 0.5

pero $P^{-1} = P^t$ pues

0.5

las columnas de P son ortonormales

$$\boxed{A = P D P^t}$$

con $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ (✱)

Si obtiene directo (✱) dar 1 pto.

$R = P F P^t$ $\quad R^t = (P^t)^t F^t P^t$

$= P F P^t = R$ 0.5p

pues $P^t = P^{-1}$

$R^2 = P F \cancel{P^t} \cancel{P} F P^t = P F^2 P^t = P D P^t = A$ 0.5p