Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Álgebra Lineal Otoño 2023- Control 2
Octubre 28, 2023

P1. Considere la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+2y+2z \\ x+3y+3z \end{pmatrix}$

(a) (1.5 puntos) Pruebe que T es lineal. Determine A la matriz representante de T con respecto a la base canónica $\mathcal{B}$ en el espacio de partida y de llegada. Recuerde que

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) (4.5 puntos) Determine bases de $Ker(T)$, el núcleo de T, y de $Im(T)$, la imagen de T. Calcule $dim(Ker(T))$ y $dim(Im(T)$. ¿Es T inyectiva?

P2. Considere la transformación lineal $L : M_{2,2} \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dada por $L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+(a+b)X+cX^2+(c+d)X^3$

(a) (2 puntos) Determine la matriz representante de L con respecto a la base canónica $\mathcal{C}$ de $M_{2,2}$ y la base canónica $\mathcal{D}$ en $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, donde

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{D} = \left\{ 1, X, X^2, X^3 \right\}.$$

(b) (2 puntos) Usando matrices de cambio de bases determine la matriz representante de L con respecto a la base $\mathcal{E}$ en el espacio de partida y la base canónica $\mathcal{D}$ en la llegada, donde

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) (2 puntos) Pruebe que L es un isomorfísmo.

P3. **(a)** (3 puntos) En este problema todas las transformaciones lineales están definidas en U a valores en U.

- Suponga que $J : U \to U$ es lineal biyectiva, es decir un isomorfismo. Pruebe que $J^{-1} : U \to U$, la transformación inversa, es lineal y biyectiva.
- Sean $T : U \to U$ y $S : U \to U$ dos transformaciones lineales. Decimos que T es semejante a S si existen isomorfismos J, L tales que $T = J \circ S \circ L$. Pruebe que si T es semejante a S entonces S es semejante a T.

(b) (3 puntos) Consideremos un espacio vectorial U de dimensión n y sea $T : U \to U$ una transformación lineal. Supongamos que T satisface la siguiente propiedad: cualquiera sea $u \in U$ tal que $T(T(u)) = 0$ entonces necesariamente $T(u) = 0$. Pruebe que los subespacios de U: $Ker(T)$ y $Im(T)$ satisfacen

$$U = Ker(T) \oplus Im(T).$$

Indicación: pruebe que $Ker(T) \bigcap Im(T) = \{0\}$ y piense en el Teorema del Núcleo-Imagen.

Tiempo del control 3 horas.