Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Algebra Lineal. Primavera 2023.
28 de octubre

Pauta P1 Control 2

P1. Considere la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+2y+2z \\ x+3y+3z \end{pmatrix}$

a) (1.5 puntos) Pruebe que T es lineal. Determine A la matriz representante de T con respecto a la base canónica $\mathcal{B}$ en el espacio de partida y de llegada. Recuerde que

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Solución

a) Para demostrar que T es lineal:

Una posibilidad es justificar mostrando que $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+2y+2z \\ x+3y+3z \end{pmatrix}$ es igual que:

$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, es decir $T(x) = Ax$.
(...0.8 pts.)

Otra forma:

$$T(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + x' + \lambda y + y' + \lambda z + z' \\ \lambda x + x' + 2\lambda y + 2y' + 2\lambda z + 2z' \\ \lambda x + x' + 3\lambda y + 3y' + 3\lambda z + 3z' \end{pmatrix} = \lambda T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + T(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

(...0.8 pts.)

Para ver la matriz representante en la base canónica, debemos calcular $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ y expresarlos en la base canónica para obtener las columnas de la matriz:

$$T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, T(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Que están expresados en la base canónica.
Por haber justificado, así o de alguna forma coherente (...0.4 pts.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(...0.3 pts.) por escribir correctamente la matriz.

b) (4.5 puntos) Determine bases de $Ker(T)$, el núcleo de T, y de $Im(T)$, la imagen de T. Calcule $dim(Ker(T))$ y $dim(Im(T)$. ¿Es T inyectiva?

Solución

Para calcular el núcleo:

$T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = 0$, Si y sólo si: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

Basta resolver el sistema homogéneo:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

que es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ que es equivalente a: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Luego la solución es:

$y = -z; x = 0$ (...1.0 pts.)

Una base del núcleo:

$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ (...0.5 pts.)

Luego dado que la dimensión de un espacio vectorial coincide con la cardinalidad de una base:

La dimensión del núcleo es 1. (...0.5 pts.)

Para calcular la Imagen, sabemos que esta coincide con el espacio generado por las columnas de A, además por el teorema de núcleo e imagen sabemos que la dimensión de la imagen es 2. (...0.5 pts.)

$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ (...0.5 pts.)

que es linealmente independiente, ya que siendo dos vectores basta ver que uno no es múltiplo del otro y las primeras coordenadas de cada uno coinciden mientras que las otras dos no, y siendo LI, sabemos que genera toda la imagen, pues la imagen como hemos dicho tiene dimensión 2.

(...1.0 pts.)

Por último dado que el núcleo tiene dimensión 1, sabemos que T no es inyectiva, pues $T(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = T(0)$

(...0.5 pts.)

Pauta P2 Control 2

P2. Considere la transformación lineal $L : M_{2,2} \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dada por $L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + (a+b)X + cX^2 + (c+d)X^3$

1) (2 puntos) Determine la matriz representante de L con respecto a la base canónica $\mathcal{C}$ de $M_{2,2}$ y la base canónica $\mathcal{D}$ en $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, donde

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{D} = \{1, X, X^2, X^3\}.$$

2) (2 puntos) Usando matrices de cambio de bases determine la matriz representante de L con respecto a la base $\mathcal{E}$ en el espacio de partida y la base canónica $\mathcal{D}$ en la llegada, donde

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3) Pruebe que L es un isomorfismo.

Solución

a) Escribiremos la transformación L aplicada a cada uno de los elementos de la base $\mathcal{C}$.

- $L\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 1 + 1\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3.$ **(0.4 puntos)**
- $L\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0 + 1\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3.$ **(0.4 puntos)**
- $L\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 0 + 0\cdot X + 1\cdot X^2 + 1\cdot X^3.$ **(0.4 puntos)**
- $L\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 0 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + 1\cdot X^3.$ **(0.4 puntos)**

Así, la matriz M representante de la transformación lineal L con respecto a las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es la siguiente

$$M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(0.4 puntos por concluir la matriz M correcta).

b) La matriz a obtener es la matriz

$$N = Q\cdot M\cdot P$$

donde

- Q es la matriz de cambio de base con partida $\mathcal{D}$ y llegada $\mathcal{D}$.
- M es la matriz representante de L con partida $\mathcal{C}$ y llegada $\mathcal{D}$.
- Q es la matriz de cambio de base con partida $\mathcal{E}$ y llegada $\mathcal{C}$.

(0.8 puntos por justificar que la matriz buscada es $N = Q\cdot M\cdot P$.)

- $Q = Id_{4\times 4}$ **(sin puntaje)**.
- M es la matriz obtenida anteriormente **(sin puntaje)**.
- P se calcula de la siguiente forma
  - $I_{M_{2\times 2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
  - $I_{M_{2\times 2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
  - $I_{M_{2\times 2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
  - $I_{M_{2\times 2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(0.2 por cada cálculo correcto)

Solución

Obteniendo finalmente que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(0.2 por obtener P correctamente)**

Para concluir, la matriz N se calcula como

$$N = Q \cdot M \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(0.2 por cálculo de N)

c) **Forma 1:** Demostraremos que L es biyectiva como sigue:

- Inyectividad:

$$\begin{aligned} & L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \\ \iff \quad & a = 0 \qquad a + b = 0 \\ & c = 0 \qquad c + d = 0 \\ \iff \quad & a = b = c = d = 0 \end{aligned}$$

  Luego, $Ker(L) = \{0\}$, lo que implica que L es inyectiva. **(1.0 punto)**

- Epiyectividad:
  Por TNI, se tiene $4 = dim(M_{2\times 2}) = 0 + dim(Im(L)) \Rightarrow dim(Im(L)) = 4 = dim(\mathcal{P}_3)$. Esto quiere decir que L es epiyectiva. **(1.0 punto)**

Forma 2: L es isomorfismo si M (o N) es invertible.

(1.0 punto por argumentar que esto basta para concluir)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

escalonando queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con lo cual, M es invertible y se concluye el resultado.
(1.0 punto por argumento de invertibilidad, esto puede ser también invertir explícitamente).

Pauta P3 Control 2

P3. (a) (3 puntos) En este problema todas las transformaciones lineales están definidas en U a valores en U.

- Suponga que $J : U \to U$ es lineal biyectiva, es decir un isomorfismo. Pruebe que $J^{-1} : U \to U$, la transformación inversa, es lineal y biyectiva.

Solución

Toda función biyectiva J posee inversa J^{-1} ...0.5$pts.$

J^{-1} es lineal :

Tomar $u, v \in U, \lambda \in \mathbb{R}$ y verificar que $J^{-1}(u + \lambda v) = J^{-1}(u) + \lambda J^{-1}(v)$

Para $x = J^{-1}(u)$ e $y = J^{-1}(v)$ usar que J es lineal:

$J(x + \lambda y) = J(x) + \lambda J(y) = u + \lambda v$ ...0.5$pts.$

Concluir que:

$J^{-1}(u + \lambda v) = J^{-1}(J(x + \lambda y)) = x + \lambda y = J^{-1}(u) + \lambda J^{-1}(v)$ ...0,5$pts.$

- Sean $T : U \to U$ y $S : U \to U$ dos transformaciones lineales. Decimos que T es semejante a S si existen isomorfismos J, L tales que $T = J \circ S \circ L$. Pruebe que si T es semejante a S entonces S es semejante a T.

Solución

Como hipótesis, si T es semejante con S tenemos que existen dos isomorfismos J y L tales que $T = J \circ S \circ L$

Por la parte anterior, la inversa de un isomorfismo es un isomorfismo.

Entonces, J^{-1} y L^{-1} son isomorfismos ...0.5$pts.$

Operando con T se obtiene :

$J^{-1} \circ T \circ L^{-1} = J^{-1} \circ (J \circ S \circ L) \circ L^{-1} \Rightarrow J^{-1} \circ T \circ L^{-1} = Id_U \circ S \circ Id_U = S$ ...0.5$pts.$

Entonces, S es semejante a T ...0.5$pts.$

(b) (3 puntos) Consideremos un espacio vectorial U de dimensión n y sea $T : U \to U$ una transformación lineal. Supongamos que T satisface la siguiente propiedad: cualquiera sea $u \in U$ tal que $T(T(u)) = 0$ entonces necesariamente $T(u) = 0$. Pruebe que los subespacios de U: $Ker(T)$ y $Im(T)$ satisfacen

$$U = Ker(T) \oplus Im(T).$$

Indicación: pruebe que $Ker(T) \bigcap Im(T) = \{0\}$ y piense en el Teorema del Núcleo-Imagen.

Solución

Hipótesis implica que $Ker(T) \cap Im(T) = \{0\}$

Saber que $v \in Ker(T) \cap Im(T) \iff T(v) = 0$ y $\exists u \in U, T(u) = v$ ...0.5$pts.$

Con esto $0 = T(v) = T(T(u))$. La hipótesis implica que $T(u) = 0$.

Entonces, $v = T(u) = 0$. ...0.5$pts.$

Dimensión de $X \oplus Y$: $dim(Ker(T) \oplus Im(T)) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T))$ ...0.5$pts.$

Teorema Núcleo e Imagen: $dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(U)$ ...0.5$pts.$

Además, $Ker(T), Im(T) \subseteq U$ implica $Ker(T) + Im(T) \subseteq U$ ...0.5$pts.$

Para un s.e.v . W de U, $dim(W) = dim(U)$ implica $W = U$.

Como $dim(Ker(T) \oplus Im(T)) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(U)$

Se concluye que: $Ker(T) \oplus Im(T) = U$ ...0.5$pts.$