Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Álgebra Lineal Otoño 2023- Control 1
Octubre 30, 2023

P1. Considere el sistema lineal $Ax = b$, con $A \in M_{4,4}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^4, b \in \mathbb{R}^4$, dado por

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 & = & 2 \\ 0x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + 0x_4 & = & 1 \\ 0x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \alpha x_4 & = & \beta \end{array}$$

donde α, β son parámetros reales. Encuentre todas las condiciones sobre α y β de modo que el sistema

- **(a)** (1.5 puntos) No tenga solución.
- **(b)** (1.5 puntos) Tenga infinitas soluciones.
- **(c)** (1.5 puntos) Tenga solución única.
- **(d)** (1.5 puntos) Bajo que condiciones en α, la matriz A es invertible.

P2. **(a)** Considere $U = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : \quad a + b = 0, c + d = 0 \right\}$.

- **I)** (1.5 puntos) Pruebe que U es un subespacio vectorial de $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
- **II)** (1.5 puntos) De una base de U y calcule la dimensión de U.

(b) (3 puntos) Considere el subespacio vectorial $W \subset \mathbb{R}^4$ generado por $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De una base de W, calcule la dimensión de W y extienda la base que construyó a una base de $\mathbb{R}^4$.

P3. **(a)** (3 puntos) Consideremos A, B matrices reales de tamaño $n \times n$, con $n \geq 1$. Diremos que A, B conmutan si $AB = BA$. En lo que sigue supondremos que A, B conmutan.

- Pruebe que A^t y B^t conmutan.
- Pruebe que A^2 y B^2 conmutan.
- Pruebe que si además A es invertible, entonces A^{-1} y B conmutan.

(b) (3 puntos) Sea W subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y considere una matriz $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

- Pruebe que $U = \{w \in W : Aw = 0\}$ es un subespacio vectorial de W.
- Suponga que existe un $v \in W$ tal que $Av \neq 0$. Concluya que $dim(U) < dim(W)$.

Tiempo del control 3 horas.