I P1

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right]$$

$\alpha \neq 0$ Sol. única (c)

$\alpha = 0 \begin{cases} \beta \neq 1 & \not\exists \text{ (a)} \\ \beta = 1 & \infty. \text{ (b)} \end{cases}$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right]$$

(d) $\alpha \neq 0$ es invertible pues $\tilde{A}$ no tiene 0 en la diagonal.

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right]$$

Cada parte tiene 1.5 pts.

Descontar 0.5 por errores en el escalonamiento

Corregir las alternativas con el escalonamiento erroneo sin quitar puntos si está bien hecho

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha-3 & \beta+1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta-1 \end{array}\right]$$

(II) P2

a) $0 \in M_{2\times 2}$ pertenece a $U$ luego no es vacío.

0.5: U no vacío

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in U$

$\lambda M + N = \begin{pmatrix} \lambda a + e & \lambda b + f \\ \lambda c + g & \lambda d + h \end{pmatrix}$

0.5: operatoria de matrices y verificación

luego $(\lambda a + e) + (\lambda b + f) = \lambda \underbrace{(a+b)}_{\substack{=0 \\ \text{pues } M \in U}} + \underbrace{(e+f)}_{\substack{=0 \\ \text{pues } N \in U}} = 0.$

similarmente

$(\lambda c + g) + (\lambda d + h) = \lambda (c+d) + (g+h) = 0$

0.5 conclusión

es s.e.v.

b) notar que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U$ si y solo si $a = -b$ $c = -d$ es decir

0.5: expresar M en términos de dos matrices

$M = \begin{pmatrix} -b & b \\ -d & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

así $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ generan $U$ pues todo $M \in U$ es combinación lineal de ellos. ¿Son l.i?

0.5: verificar ind. Lineal.

$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}$ ✓

$\dim U = 2$.

0.5: concluir que hay una base de cardinal dos

II P2

b) veamos que vectores de $v_1, v_2, v_3, v_4$ son l.i.

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$ es equivalente al sistema homogéneo $A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_4\end{pmatrix} = 0$ donde A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$ escalonamos para obtener la solución general.

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ luego la solución general es $\lambda_4$ libre y se despejan $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ en función de $\lambda_4$

Como $\lambda_4$ es ~~libre~~ la única variable libre $\Rightarrow v_4$ es dependiente y los otros 3 son l.i. tomar $\lambda_4 = -1$ y despejar $v_4$ en función de $v_1, v_2, v_3$

Si $\lambda_4 = 0$ el sistema en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tiene sol. única $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ son l.i.

para completar la base $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$ tomaremos alguno de la base canónica

En esta parte basta decir que los vectores asociados a los pivotes son los vectores l.i.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\underbrace{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{\text{base canónica}}\right] \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

II b)

x que:

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

luego se puede agregar cualquier vector de la base canónica a $\mathcal{A}$ para tener una base de $\mathbb{R}^4$ por ejemplo el $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2 puntos por encontrar base de W
1 punto por completar

descontar a lo más 0.5 en cada escalonamiento si está mal

La completación puede ser con adivinanza, siempre que justifiquen el resultado

III

0.5: producto y traspuesta

a) $(AB)^t = B^t A^t \Rightarrow A^t, B^t$ conmutan

$\quad \| \quad$ A y B conmutan

$(BA)^t = A^t B^t$

0.5 uso de hipótesis

b) $A^2B^2 = AABB = ABAB = BABA$

$= BBAA = B^2A^2$

0.5: estrategía

0.5: uso de la hipótesis

~~c) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$~~

~~$\|$~~

~~$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$~~

~~Conmutan A y B.~~

0.5: uso de la hipótesis

~~d)~~ c) $A^{-1}BA = A^{-1}AB = B$

luego $A^{-1}BA = B \quad / \cdot A^{-1}$

0.5: estrategía

$A^{-1}BAA^{-1} = BA^{-1}$

$\|$

$A^{-1}B$

## III b)

i) W es s.e.v.

Sean $w_1, w_2 \in U \subseteq W$

$\lambda w_1 + w_2 \in W$ pues W es s.e.v.

$A(\lambda w_1 + w_2) = \lambda A w_1 + A w_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda w_1 + w_2 \in U.$

ii) Supongamos que $v \in W$ es tal que $Av \neq 0$ luego $v \notin U$, es decir U está contenido estrictamente en W

esto implica que $\dim U \leq \dim W$

pero $\dim U = \dim W$ no puede ser pues entonces $U = W$.

0.5: W estable para producto y ponderación

0.5: propiedades del producto de matrices

0.5 conclusión

0.5 U distinto a W

0.5: relación de las dimensiones

0.5: uso de propiedad de dimensión y sev.