Pauta C3 Álgebra lineal

P1 - a)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol: Dado que la matriz es simétrica con valores reales sabemos que es diagonalizable sin necesidad de hacer cálculos.

Valores ppios:

Buscamos $\lambda \in \mathbb{R}$ tq

$$\det(B - \lambda I) = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix}(2-\lambda) & -1 & 0\\ -1 & (2-\lambda) & 0\\ 0 & 0 & (2-\lambda)\end{pmatrix}\right| = (2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}(2-\lambda) & -1\\ -1 & (2-\lambda)\end{vmatrix}$$

0,6

$$(2-\lambda)\cdot\left((2-\lambda)^2-1\right) = (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$$

Vectores ppios:

W_1: Buscamos el Ker $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

0,3

$$x = y \quad \wedge \quad z = 0$$

Luego $W_1 = \left\langle \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$ 0,4

De igual forma buscamos el vector asociado a $\lambda = 2$

W_1: Buscamos el Ker $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$0 = x = y$ y z libre

0,3

Luego $W_2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

0,4

Por último el vector asociado a $\lambda = 3$

W_3: Buscamos el Ker $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

0,3

$x = -y \wedge z = 0$

Luego $W_3 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

0,4

Las multiplicidades geometricas son:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma(1) = \gamma(2) = \gamma(3) = 1 \\ \quad \shortparallel \qquad\quad \shortparallel \qquad\quad \shortparallel \\ \dim(W_1) \quad \dim(W_2) \quad \dim(W_3) \end{array}\right\} \quad 0,3$$

dado que existen los valores ppios.

→ pueden escribirlo como $\gamma(\lambda)$ o como $\dim(W_\lambda)$ no es necesario ambas

b) Determinar para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la sig. matriz $A \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$ es diagonalizable.

Solución:

Debemos ver para qué valores de a existe una base de vectores ppios.

1) Buscamos los valores ppios:

$$\left.\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} (2-\lambda) & a & 1 & 1 \\ 0 & (2-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & 0 & (3-\lambda) & 1 \\ 0 & 0 & 2 & (4-\lambda) \end{pmatrix} = \\ &(2-\lambda)^2 \cdot \left((3-\lambda)(4-\lambda) - 2 \right) = \\ &(2-\lambda)^2 \left(x^2 - 7x + 10 \right) = \\ &(2-\lambda)^3 \, (5-\lambda) \end{aligned}\right\} \quad 0,5$$

Debemos revisar la dimensión de

0,5

W_2, el espacio de vectores ppios asociado a $\lambda = 2$, que debe tener dimensión 3 para que A sea diagonalizable, ya que $\lambda = 5$ tendrá un vector ppio asegurado y $\alpha(5) = \gamma(5)$.

0,3

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim^{\substack{f_3 - 2f_2 \to f_3 \\ f_3 + 2f_2 \to f_3}} \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $a \neq 0$ está escalonada

0,2

Si $a = 0 \implies$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a \neq 0$ 0,2

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2w = 0 \Rightarrow w = 0$

$z = w \Rightarrow z = 0$

$ay = 0 \Rightarrow y = 0$

x libre.

$a = 0$

0,2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2w = 0 \Rightarrow w = 0$

$z = w = 0$

x e y libres.

$W_2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ si $a \neq 0$ 0,2

$W_2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ si $a = 0$ 0,2

Luego como $\alpha(2) = 3$ e independientemente del valor que tome a $\gamma(2) \leq 2$

La matriz no es diagonalizable

pues $\gamma(2) \leq 2 < \alpha(2) = 3$

$\forall a \in \mathbb{R}$

0,7

P2) a) $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, simétrica

y

1) $A\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ para al gún $\lambda \in \mathbb{R}$

2) $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$

3) $A\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Encuentre D diagonal, P invertible tq: $P^{-1} = P^t$ tq $A = PDP^t$

Solución:

Sabemos que en una matriz simétrica con coef. reales vectores ppios asociados a valores ppios distintos son ORTOGONALES.

$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \cancel{\perp} \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

0,8

por lo tanto $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ están asociados al mismo λ, ie $\lambda = 0$.

Luego $W_3 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ 0,2

$Ker = W_0 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ 0,4

Para que $P^{-1} = P^t$ la base de vectores ppios tiene que ser ORTONORMAL. 0,2

$W_0 \perp W_3$, necesitamos normalizar W_3 y ORTONORMALIZAR W_0. (G-S) 0,2

Usando Gramm Schmidt:

$$\mathcal{B}_{W_0} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \left[\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - P_{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}{\| \cdot \|} \right] \right\}$$

$$\left[\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right] \Big/ \|\cdot\|$$

$$\frac{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}{\|\cdot\|} = \begin{pmatrix}-1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix} \Big/ \|\cdot\|$$

$$\left\|\begin{pmatrix}-1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1/4 + 1 + 1/4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

0,4

Luego una base de v.p. ORTONORMAL es:

$$\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

0,4

Luego A:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

0,4

cuidado pueden dar la matriz en otro

orden, sólo deben respetar que si el orden de los vectores ppios cambia también cambia el orden.

P2 b) $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ diagonalizable

Pruebe que A^2, A^t y $I+A$ son diagonalizables y encuentre los valores ppios de las mismas.

A diagonalizable $\Rightarrow$

$$A = PDP^{-1}$$

$$I + A = PP^{-1} + PDP^{-1}$$

$$P^{-1}(I+A)P = (P^{-1}P)(P^{-1}P) + D$$

$$= I + D$$

0,5

luego:

$$I + A = P\,(I + D)\,P^{-1}$$

0,5

si λ_i es valor ppio de A $\Rightarrow$

$\lambda_i + 1$ es valor ppio de $(I+A)$

para $i = 1, \ldots, n$.

2)

$$A = P D P^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad A^t = (P D P^{-1})^t$$

$$A^t = (P^{-1})^t D^t P^t = (P^t)^{-1} D\, P^t$$

0,5

luego los valores ppios de A^t son iguales a los de A.

0,5

3) $A = PDP^{-1}$

$A^2 = (PDP^{-1})^2 = PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{I}DP^{-1}$

$= PD^2P^{-1}$ $\quad D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$

0,5

Luego los valores ppios de A^2 son $\lambda_i^2 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

0,5