Pauta control 1 Álgebra lineal.

P1) 1) Considere el sistema lineal

$Ax = b$:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 18 \\ 11 & -4 & -p^2+p-1 & 40-p^2+5p \end{array}\right)$$

$p \in \mathbb{R}$. Encuentre todas condiciones sobre $p$ de modo que el sistema

1) No tenga solución
2) Tenga infinitas sol.
3) " solución única

<u>Sol</u>: Para resolver este ejercicio necesitamos escalonar la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 18 \\ 11 & -4 & -p^2+p-1 & 40-p^2+5p \end{array}\right) \xrightarrow{f_2-3f_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & 10 & 30 \\ 11 & -4 & -p^2+p-1 & 40-p^2+5p \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-11f_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & 10 & 30 \\ 0 & -15 & -p^2+p+32 & 84-p^2+5p \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-3f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & -p^2+p+2 & -p^2+5p-6 \end{array}\right)$$

0,9

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & -p^2+p+2 & -p^2+5p-6 \end{array}\right)$$

Con la matriz escalonada:

1) Para que el sistema <u>no</u> tenga solución:

$$-p^2+p+2=0 \quad \wedge \quad -p^2+5p-6 \neq 0$$

$$(p+1)(p-2)=0 \quad \wedge \quad (p-2)(p-3) \neq 0$$

estas dos condiciones se cumplen sólo si $\boxed{p=-1}$. Y hacen que el sistema sea incompatible 0,7

2) Para que el sistema tenga infinitas soluciones al menos una fila debe ser completamente cero:

$$(p+1)(p-2)=0 \quad \wedge \quad (p-2)(p-3)=0$$

esto sucede si y sólo si

$$\boxed{p = 2}$$

0,7

3) Para que el sistema tenga solución única necesitamos que la matriz escalonada no tenga ceros en la diagonal i.e:

$\forall\, p \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$ el sistema

Tiene solución única.

0,7

P1) 2) I) supongamos $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ satisface la igualdad:

$$A^2 + A^3 + A^4 + 2I = 0$$

A es invertible si y sólo si existe $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tq $AB = B \cdot A = I$

Sol: como las matrices tienen inverso aditivo: $\longrightarrow$ 0,3

$$\left.\begin{aligned} A^2 + A^3 + A^4 &= -2I \\ -\frac{1}{2}\left(A^2 + A^3 + A^4\right) &= I \end{aligned}\right\} \; 0{,}2$$

luego: como la multiplicación de matrices distribuye c/respecto a la suma: 0,3

$$\left.\begin{aligned} & A\left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A^3\right) = I \\ y \quad & \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A^3\right) \cdot A = I \end{aligned}\right\} \; 0{,}2$$

Luego por unicidad de la inversa

$$A^{-1} = \left(-\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}A^2 - \tfrac{1}{2}A^3\right) \Big\} \; 0{,}5$$

P1) 2) II)

Supongamos que $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, tales que $AB = I \in M_{m,m}(\mathbb{R})$

Pruebe que la única solución del sistema $A^t x = 0$, es $x = 0 \in \mathbb{R}^m$

$$\left.\begin{aligned} & A^t x = 0 \Rightarrow B^t A^t x = B^t \cdot 0 \\ & \Leftrightarrow B^t A^t x = 0 \Leftrightarrow (AB)^t x = 0 \\ & \Leftrightarrow I x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}\right\} \; 0{,}8$$

y es única por: (equivalentes)

1) $I$ es invertible
2) $I$ está escalonada y no tiene ceros en la diagonal.

3) Sea $x \neq 0$ tq

$$A^t x = 0 \Rightarrow B^t A^t x = 0$$

$$(AB)^t x = 0 \Rightarrow I x = 0 \Rightarrow x = 0$$

una de las tres 0,7

$\cancel{\ast}$

P2) a) Considere $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$, vectores fijos y definamos:

$$W = \{ M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \,/\, Mv = u \}$$

Pruebe que $W$ es subespacio de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ si y sólo si $u = 0 \in \mathbb{R}^m$.

1) Sea $u = 0$, debemos probar que

$W = \{ M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) / Mv = 0 \}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Lo primero es ver que $\underline{W \neq \emptyset}$

pero sabemos que $M = 0$ (la matriz que tiene ceros en cada entrada) pertenece a $W \Rightarrow W \neq \emptyset$

0,5

Sean $M_1, M_2 \in W$, debemos probar que para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha M_1 + \beta M_2 \in W$ 0,2

$$(\alpha M_1 + \beta M_2)\, v = \alpha \underbrace{M_1 v}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ (M_1 \in W)}} + \beta \underbrace{M_2 v}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ (M_2 \in W)}} = 0$$

0,7

Luego $W$ es subespacio vectorial. 0,5

Ahora sea $u \neq 0$, por demostrar que $W$ <u>NO</u> es subespacio.

Tenemos dos opciones:

1) $W = \emptyset$, por lo que no es subespacio vectorial 0,3

2) $W \neq \emptyset$

en este caso:

Sea $M \in W$ entonces

$$(M+M).v = u$$

$0,8$

$$Mv + Mv = u + u = 2u \neq u$$

o $u = 0$

puede hacerse de otras formas, ej $0 \notin W$

2) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ determinar si existe $w \in \mathbb{R}^2$ tq:

$$\langle \{w\} \rangle = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;/\; Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Solución:

Busquemos primero la sol. del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \underset{f_2 - 3f_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0,6

Sol del sistema:

$$x + 2y = 0 \qquad x = -2y$$

es decir TODAS las soluciones del sistema 0,3

son $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $v = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} =$

$y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}$

0,6

luego como $\langle \{w\} \rangle = \lambda w, \ \lambda \in \mathbb{R}$ 0,5

por lo hecho:

$w = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es tq $\langle \{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \} \rangle$

genera el espacio de soluciones.

1 pto

// Usando el hint: (OTRA FORMA)

Primero probamos que el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo es un subespacio.

ie: $\underbrace{\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,/\, Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}_{V}$ es subespacio vec.

1) $V \neq \emptyset$ $\quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V \Rightarrow V \neq \emptyset$

0,8

2) Sean $x_1, x_2 \in V$ pd: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in V$

$$A x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \underbrace{A x_1}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \beta \underbrace{A x_2}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

0,2 Luego sabemos que el generado por un vector es un subespacio vectorial.

0,2 Para ver que con un vector alcanza hay que ver — el sistema tiene solución.

y además no hay dos vectores l.I que sean sol del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \underset{f_2 - 3f_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol del sistema:

$x + 2y = 0 \qquad x = -2y$

es decir TODAS las soluciones del sistema son $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $v = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ y \in \mathbb{R}$

luego como $\langle \{w\} \rangle = \lambda w, \ \lambda \in \mathbb{R}$ por lo hecho:

$w = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es tq $\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ genera el espacio de soluciones.

(1,8)

igual proporción que antes.