Control 2

P1. Considere la transformación $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

I) (1 punto) Demuestre que T es lineal.

II) (3 puntos) Calcule una base de $Ker(T)$, el núcleo de T. Determine la dimensiones del núcleo y la dimensión de $Im(T)$, la imagen de T.

III) (2 puntos) Considere las bases canónicas

$$\mathcal{A} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),,$$

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Determine $M \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$, la matriz representante de T con respecto a las bases $\mathcal{A}$ en la partida y $\mathcal{B}$ en la llegada.

Comentario: Puede resolver II y III en el orden que más le acomode.

P2. **2.1)** (3 Puntos) Supongamos que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal que satisface la propiedad: para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$T(T(x)) = T(x),$$

es decir T^2, la composición $T \circ T$, es igual a T.

I) (1 punto) Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se satisface: $x - T(x)$ pertenece al $Ker(T)$.

II) (1 punto) Pruebe que $\mathbb{R}^n = Ker(T) + Im(T)$.

III) (1 punto) Pruebe que $Ker(T) \bigcap Im(T) = \{0\}$ y concluya que $\mathbb{R}^n = Ker(T) \oplus Im(T)$

2.2) (3 puntos) Considere $\mathcal{C} = \{2x^2 - 1, x^2 + 1, 3\}$, subconjunto del espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado menor o igual a 2 a coeficientes en $\mathbb{R}$. Sea W el subespacio generado por $\mathcal{C}$, es decir

$$W = \langle\{2x^2 - 1, x^2 + 1, 3\}\rangle.$$

I) (1.5 puntos) Encuentre un subconjunto de $\mathcal{C}$ que sea base de W.

II) (1.5 puntos) Extienda la base de W que obtuvo en el punto anterior a una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Tiempo del control 2 hrs. Entregue a tiempo. Evite descuentos por atraso