Pauta C2 MA1102:

P1: Considere la transformación $T: \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

I) Demuestre que T es lineal:

Pdq: $\forall \quad M_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{T(\alpha M_1 + \beta M_2)}_{\parallel} = \alpha T(M_1) + \beta T(M_2)$$

0,3

$$\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 & \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 & \alpha x_4 + \beta y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha x_2 \\ \alpha x_3 & \alpha x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta y_1 & \beta y_2 \\ \beta y_3 & \beta y_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} = \alpha T(M_1) + \beta T(M_2)$$

0,5

Por propiedades de la suma y pondera.

ción de matrices.

Luego la transformación es lineal. 0,2

II) y III)

Tomando la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{1 pto}}$

Luego la matriz representante de T de la base $\mathcal{A}$ en la base β es:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1 pto

Ker(T):

Primera forma: (usando la matriz representante, y dado que va de la base canónica:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

0,4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_3 + 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{x_1 = -2x_2}$$

0,8

$$\boxed{x_3 = -2x_4}$$

luego $\operatorname{Ker} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

claramente matrices linealmente independientes por lo que

$$\beta_{\operatorname{Ker}} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$ 0,8

es <u>una</u> base del núcleo.

Además por el teorema de núcleo e imagen (TNI):

$$\underbrace{\dim\left(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\right)}_{=\,4} = \underbrace{\dim(\operatorname{Ker} T)}_{=\,2} + \dim(\operatorname{Im} T)$$

$$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} T) = 2 = \dim(\operatorname{Ker} T)$$

1 pto

No es necesario pero podrían haber calculado la imagen para ver la dim.

además la imagen podemos calcularla de varias formas

1) Ver las columnas L.I de la matriz representante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(podemos tomar cualquier combinación tomando una columna entre la 1 y 2 y otra columna entre la 3 y la 4.

Luego la imagen está generada (dado que la base de llegada es la canónica de $\mathbb{R}^2$) por:

$$\beta_{\text{Im}\,T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Importante: en realidad pueden elegir cualquier par de vectores L.I de $\mathbb{R}^2$ y justificar como:

$\text{Im}(T)$ s.e.v $\mathbb{R}^2$

Tienen la misma dim $\Rightarrow$

SON IGUALES.

P2) $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

tal que $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$(1)\quad T(x) = T(T(x)) \qquad (T^2(x),\ T \circ T(x))$$

1) Pruebe que $x - T(x) \in \operatorname{Ker} T$

$$T(x - T(x)) = T(x) - T(T(x))$$

ya que T es lineal

0,5

$$T(x) - T(T(x)) \underset{(1)}{=} T(x) - T(x) = 0$$

0,5

$$\Longrightarrow \quad x - T(x) \in \operatorname{Ker}(T)$$

2) Pruebe que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} T + \operatorname{Im} T$

Sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$x - T(x) \in \operatorname{Ker} T$, basta demostrar

que $\forall v \in \mathbb{R}^n$ $v = v_1 + v_2$

donde $v_1 \in \operatorname{Ker} T$ y $v_2 \in \operatorname{Im} T$

sea $v \in \mathbb{R}^n$: $v - T(v) \in \operatorname{Ker} T$

0,5

calculamos $v - T(v) = v_1$

$v_1 \in \operatorname{Ker} T$ pero $v = v_1 + \underbrace{T(v)}_{\in \operatorname{Im} T}$

llamamos v_2 a $T(v)$

$v = v_1 + v_2$ donde $v_1 \in \operatorname{Ker} T$ y $v_2 \in \operatorname{Im} T$

0,5

3) demuestre que $\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$

Sea $v \in \mathbb{R}^n$ tq $v \in \operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T$

como $v \in \operatorname{Im} T$, $\exists\, w \in \mathbb{R}^n$ tq

$T(w) = v$ luego

$T(T(w)) = T(v)$

0,5

como $v \in \operatorname{Ker} T$ $0 = T(v) = T(T(w))$

pero $T(T(w)) = T(w) = v = 0$ 0,5

luego $\operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$

2.2) Sea $\mathcal{C} = \{2x^2-1,\ x^2+1,\ 3\}$ subconjunto de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

$$W = \langle \{2x^2-1,\ x^2+1,\ 3\} \rangle$$

1) Encuentre un subconjunto de $\mathcal{C}$ que sea base de W.

el conjunto es L.D:

$$3\left(2x^2-1\right) + 6\left(x^2+1\right) = 3$$

0,7

Además todo par de vectores del conjunto es L.I (pues no hay ninguno que sea múltiplo de otro) luego

$\mathcal{B}_W = \{x^2+1,\ 3\}$ es una base de W.

0,8

2) Para extender la base, basta ver que no puedo generar x con estos dos polinomios.

luego $\beta = \{x^2+1, 3, x\}$ es L.I

0,8

y para ver que es base basta decir que $\dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) = 3$

y todo conjunto L.I de 3 vectores ES BASE.

(o demostrar que genera)

0,7