Control 3 - Otoño 2024

P1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (2.0 ptos) Determine todos los valores propios de A.

b) (2.0 ptos) Para cada valor propio λ de A determine el subespacio vectorial de vectores propios asociados a λ, es decir, calcule $W_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.

c) (2.0 ptos) Encuentre matrices $P, D \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ tales que D es diagonal, $PP^T = I$ y $A = PDP^T$.

P2. *a*) (3.0 ptos) Sea $M \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ simétrica y $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ una solución del sistema homogéneo $Mx = 0$. Sabiendo que 1 es valor propio de M, encuentre M.

b) (3.0 ptos) Sean $u_1, u_2, w \in \mathbb{R}^4$ tales que

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sea además $U = \langle \{u_1, u_2\} \rangle$. Encuentre $u \in U$ y $v \in U^\perp$ tales que $w = u + v$.

P3. *a*) En cada uno de los siguientes casos, indique si la matriz M es o no diagonalizable (justifique):

1) (1.5 ptos) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) (1.5 ptos) $M = A^T A$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Sean $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < n$, y $\{v_1, ..., v_k\}$ una base ortonormal del sub-espacio vectorial V de $\mathbb{R}^n$. Considere $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ y la matriz de $n \times n$ dada por:

$$A = \lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T + ... + \lambda_k v_k v_k^T.$$

1) (1.0 ptos) Pruebe que v_i es vector propio de A asociado al valor propio λ_i.

2) (1.0 ptos) Pruebe que $v \in V^\perp$, $v \neq 0$, es vector propio de A e indique a qué valor propio está asociado.

3) (1.0 ptos) ¿Es diagonalizable la matriz A? Justifique.

Duración: 3 horas.