Control 3 - Otoño 2024

P1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (2.0 ptos) Determine todos los valores propios de A.

b) (2.0 ptos) Para cada valor propio λ de A determine el subespacio vectorial de vectores propios asociados a λ, es decir, calcule $W_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)$.

c) (2.0 ptos) Encuentre matrices $P, D \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ tales que D es diagonal, $PP^T = I$ y $A = PDP^T$.

Solución:

a) Por definición, el polinomio característico de A es

$$P_A(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right|.$$

Expandiendo con respecto a la 3era columna de $A - \lambda I$ y aplicando el procedimiento estándar para el cálculo del determinante de una matriz de 3×3, se verifica que

$$P_A(\lambda) = (3-\lambda)\big((1-\lambda)^3 + 2 - 3(1-\lambda)\big) = (3-\lambda)\big(3\lambda^2 - \lambda^3\big) = \lambda^2(3-\lambda)^2.$$

Sigue que los valores propios de A son 0 y 3.

[1.0 ptos. por encontrar P_A – 0.5 ptos. por factorizar P_A – 0.5 ptos. por dar los valores propios de A. Descontar 0.5 ptos. por cada error aritmético, hasta un máximo de 1.0 ptos. de descuento.]

b) Resolviendo los respectivos sistemas lineales homogéneos, se verifica que:

$$W_0 = \text{Ker}(A - 0 \cdot I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

$$W_3 = \text{Ker}(A - 3 \cdot I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

[0.5 ptos. por los generadores de W_0 y 0.5 ptos. por los de W_3 – descontar 0.3 ptos. por cada error aritmético.]

Aplicando Gram-Schmidt para obtener bases ortonormales de W_0 y W_3 a partir de los respectivos generadores recién encontrados, se obtiene que:

$$W_0 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

$$W_3 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

[0.5 ptos. por la base ortonormal de W_0 y 0.5 ptos. por la de W_3 – Descontar 0.3 ptos. por cada error aritmético y 0.5 ptos. por cada dimensión de alguno de los W_λ que no coincida con la multiplicidad algebraica de λ del polinomio P_A obtenido en la parte anterior.] Importante, si la ortonormalización se resuelve en la parte c el punto asignado a esta parte pasa a ese ítem.

c) Por el Teorema de Diagonalización de Matrices Simétricas, directo de las partes anteriores, se tiene que $A = PDP^T$ con

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

[1.0 ptos. por cada matriz. Restar 1.0 ptos. si el orden de las columnas en P no coincide con el orden de los valores propios asociados en D, o si $PP^T \neq I$. No penalizar por otros errores producto de acarreo de partes anteriores.]

P2. *a*) (3.0 ptos) Sea $M \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ simétrica y $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ una solución del sistema homogéneo $Mx = 0$. Sabiendo que 1 es valor propio de M, encuentre M.

Solución: *Primera Forma:* Como $Mu = 0 = 0 \cdot u$, sigue que $\widehat{u} = u/||u|| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ es vector propio de M asociado al valor propio 0.

Como vectores propios asociados a valores propios distintos de una matriz simétrica son ortogonales **[1.0 ptos. por mencionar este resultado]**, de un cálculo sencillo, sigue que

$$W_1 = \langle \{\widehat{u}\} \rangle^\perp = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Luego, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es vector propio de M asociado al valor propio 1, es decir, $Mv = v$ [**1.0 ptos. por dar un vector propio asociado a** 1].

Observando que $\widehat{v} = v/\|v\| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, es vector propio de M asociado al valor propio 1, sigue que $\widehat{u}, \widehat{v}$ es base de vectores propios de M asociados a los valores propios 0 y 1, respectivamente. Luego,

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \qquad \text{([\textbf{1.0 ptos.}])}$$

Segunda Forma: Como $Mu = 0 = 0 \cdot u$, sigue que $\widehat{u} = u/||u|| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ es vector propio de M asociado al valor propio 0.

Como vectores propios asociados a valores propios distintos de una matriz simétrica son ortogonales [**1.0 ptos. por mencionar este resultado**], de un cálculo sencillo, sigue que

$$W_1 = \langle \{\widehat{u}\} \rangle^{\perp} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Luego, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es vector propio de M asociado al valor propio 1, es decir, $Mv = v$ [**1.0 ptos. por dar un vector propio asociado a** 1]. Como M es matriz simétrica a coeficientes reales, sabemos que existen $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} Mu = 0 \cdot u &\iff x + y = 0,\, y + z = 0, \\ Mv = 1 \cdot v &\iff x - y = 1,\, y - z = 1. \end{aligned}$$

Resolviendo, se obtiene que

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \qquad \text{([\textbf{1.0 ptos.}])}$$

Tercera Forma:

Como M es matriz simétrica a coeficientes reales, sabemos que existen $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}. \qquad \text{([\textbf{1.0 ptos.}] \textbf{Id que es simétrica})}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} Mu = 0 \cdot u \iff & x + y = 0,\, y + z = 0, \\ & x = -y,\, z = -y = x \end{aligned} \qquad \text{([\textbf{1.0 ptos.}])}$$

Como 1 es valor propio de M

$$\operatorname{Det}(M-I)=0 \iff (y+1)^2-y^2=0$$

Resolviendo, se obtiene que

$$y=-\frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow M=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(**[1.0 ptos.]**)

b) (3.0 ptos) Sean $u_1, u_2, w \in \mathbb{R}^4$ tales que

$$u_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad w=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sea además $U=\langle\{u_1,u_2\}\rangle$. Encuentre $u \in U$ y $v \in U^{\perp}$ tales que $w=u+v$.

Solución: Como u_1 y u_2 son l.i. (ya que ninguno es múltiplo escalar del otro), sabemos que U tiene dimensión 2. Ya sea por cálculo directo de $U^{\perp}$ o usando el resultado

$$\dim(U)+\dim(U^{\perp})=\dim(\mathbb{R}^3),$$

se deduce que la dimensión de $U^{\perp}$ es 1.

De la discusión previa y resultados conocidos, sabemos que existen $\{\widehat{u}_1,\widehat{u}_2\}$ y $\{\widehat{u}_3\}$ bases ortonormales de U y $U^{\perp}$, respectivamente. Como $\widehat{u}_3$ es ortogonal a $\widehat{u}_1$ y $\widehat{u}_2$, sigue que, $\{\widehat{u}_1,\widehat{u}_2,\widehat{u}_3\}$ es base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y que

$$w=\underbrace{\langle w,\widehat{u}_1\rangle\widehat{u}_1+\langle w,\widehat{u}_2\rangle\widehat{u}_2}_{u}+\underbrace{\langle w,\widehat{u}_3\rangle\widehat{u}_3}_{v},$$

con $u \in U$ y $v \in U^{\perp}$. En otras palabras, basta tomar como u la proyección ortogonal de w sobre U y como v la proyección ortogonal de w sobre $U^{\perp}$.

Primera Forma: Por definición de ortogonal de U, resolviendo un sistema lineal de dos ecuaciones en tres incógnitas, se obtiene que

$$U^{\perp}=\left\langle\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle.$$

Luego, sigue que $U^{\perp}=\langle\{\widehat{u}_3\}\rangle$ donde

$$\widehat{u}_3=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

(**[1.0 ptos. por encontrar base ortonormal de $U^{\perp}$]**)

y que la proyección ortogonal de w sobre $U^{\perp}$ es

$$v = \langle w, \widehat{u}_3 \rangle \widehat{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{([}\textbf{1.0 ptos. por determinar } v \textbf{ correctamente}\text{])}$$

Finalmente, fijamos

$$u = w - v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{([}\textbf{1.0 ptos.}\text{])}$$

Segunda Forma: Aplicando Gram-Schmidt al conjunto de vectores $\{u_1, u_2\}$ generadores de U, se obtiene que $\{\widehat{u}_1, \widehat{u}_2\}$ es base ortonormal de U, donde:

$$\widehat{u}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \widehat{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

([**1.0 ptos. por encontrar base ortonormal de U**])

Luego, la proyección ortogonal de w sobre U es

$$u = \langle w, \widehat{u}_1 \rangle \widehat{u}_1 + \langle w, \widehat{u}_2 \rangle \widehat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \widehat{u}_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} \widehat{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

([**1.0 ptos. por determinar u correctamente**])

Finalmente, fijamos

$$v = w - u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{([}\textbf{1.0 ptos.}\text{])}$$

Tercera forma: Calcular v como en la *Primera Forma* y u como en la *Segunda Forma* [**0.5 ptos. por encontrar base ortonormal de U – 0.5 ptos. por encontrar base ortonormal de $U^{\perp}$ – 1.0 ptos. por calcular u – 1.0 ptos. por calcular v**].

Cuarta forma: Calcular $\widehat{u}_1$ y $\widehat{u}_2$ como en la *Segunda Forma* [**0.5 ptos.**] y $\widehat{u}_3$ como en la *Primera Forma* [**0.5 ptos.**]. Posteriormente, resolver el sistema lineal en 3 ecuaciones y 3 variables,

$$w = x\widehat{u}_1 + y\widehat{u}_2 + z\widehat{u}_3,$$

y así obtener $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{2}{\sqrt{6}}$, $z = \sqrt{2}$ [**1.0 ptos. por resolver correctamente el sistema**]. Sigue que $w = u + v$ donde

$$u = x\widehat{u}_1 + y\widehat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{([}\textbf{0.5 ptos.}\text{])}$$

$$v = z\widehat{u}_3 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{([}\textbf{0.5 ptos.}\text{])}$$

P3. *a)* En cada uno de los siguientes casos, indique si la matriz M es o no diagonalizable (justifique):

1) (1.5 ptos) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) (1.5 ptos) $M = A^T A$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

1) Como la matriz es triangular inferior, sus valores propios son los elementos en la diagonal, es decir, 0 (de multiplicidad algebraica 3) y 1 (de multiplicidad algebraica 1) [**0.5 ptos. por identificar los valores propios de M y sus multiplicidades algebraicas**].
A continuación estudiamos la multiplicidad geométrica del valor propio 0. Para ello, calculamos su espacio de vectores propios:

$$W_0 = \mathrm{Ker}(M - 0 \cdot I) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Sigue que la dimensión del espacio de vectores propios asociado al valor propio 0 (es decir, su multiplicidad geométrica) es 1 y no coincide con su multiplicidad algebraica [**0.5 ptos. por determinar la multiplicidad geométrica de** 1]. Luego M no es diagonalizable. [**0.5 ptos. por concluir aplicando correctamente el criterio de diagonalización.**]

2) Sin importar cuál sea la matriz A a coeficientes reales, se tiene que $M = A^T A$ es matriz simétrica a coeficientes reales, luego diagonalizable [**1.5 ptos. por observar que M es simétrica y concluir**].

b) Sean $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < n$, y $\{v_1, ..., v_k\}$ una base ortonormal del sub-espacio vectorial V de $\mathbb{R}^n$. Considere $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ y la matriz de $n \times n$ dada por:

$$A = \lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T + ... + \lambda_k v_k v_k^T.$$

1) (1.0 ptos) Pruebe que v_i es vector propio de A asociado al valor propio λ_i.

2) (1.0 ptos) Pruebe que $v \in V^\perp$, $v \neq 0$, es vector propio de A e indique a qué valor propio está asociado.

3) (1.0 ptos) ¿Es diagonalizable la matriz A? Justifique.

Solución:

1) Como $\{v_1, ..., v_k\}$ es un conjunto ortonormal, tenemos que [**0.2 ptos.**]

$$v_j^T v_i = \langle v_j, v_i \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Luego,

$$Av_i = \Big(\sum_{j=1}^{k} \lambda_i v_j v_j^T\Big) v_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j (v_j^T v_i) = \lambda_i v_i,$$

([**0.3 ptos. por cada una de las dos últimas igualdades**])

es decir, v_i es vector propio asociado al valor propio λ_i [**0.2 ptos. por concluir**].

2) Si $v \in V^{\perp}$, por definición de espacio otogonal y dado que $v_1, ..., v_k \in V$, sigue que $v_j^T v = \langle v_j, v \rangle = 0$ para todo $j \in \{1, ..., k\}$ [**0.2 ptos**]. Luego,

$$Av = \Big(\sum_{j=1}^{k} \lambda_i v_j v_j^T\Big) v = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j^T (v_j^T v) = 0,$$

([**0.3 ptos. por cada una de las dos últimas igualdades**])

es decir, v es vector propio asociado al valor propio 0 [**0.2 ptos. por indetificar correctamente el valor propio**].

3) *Primera forma:* Usando repetidamente que $(B+C)^T = B^T + C^T$, que $(MN)^T = N^T M^T$, y que $(\lambda Q)^T = \lambda Q^T$ si $\lambda \in \mathbb{R}$ (cuando las expresiones tienen sentido), se tiene que:

$$A^T = \Big(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j v_j^T\Big)^T = \sum_{j=1} \big(\lambda_j v_j v_j^T\big)^T = \sum_{j=1} \lambda_j v_j v_j^T = A,$$

([**0.4 ptos. por la 2da, 0.4 ptos. por la 3era, y 0.2 ptos. por el último** =])

es decir, A es simétrica.

Segunda forma: Como $V \subseteq \mathbb{R}^n$, por resultado visto, sabemos que tiene una base ortonormal, digamos $v_{k+1}, ..., v_n$ (en efecto, por resultado visto, $\dim(V) + \dim(V^{\perp}) = n$, luego $\dim(V^{\perp}) = n - k$) [**0.4 ptos. por calcular la dimensión de $V^{\perp}$ (y justificar)**]. Sigue que $v_1, ..., v_n$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, y de las dos partes anteriores, es además una base de vectores propios de A [**0.4 ptos. por especificar y justificar la existencia de una base de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de A**]. Por definición de matrices diagonalizables, sigue que A es diagonalizable [**0.2 ptos por aplicar criterio de diagonalización y concluir**].

Duración: 3 horas.