Control 2 - Otoño 2024

P1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por:

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x + y + 3z \\ x + 2y + z \\ 3x + 3y + 4z \end{pmatrix}.$$

a) (2.0 ptos.) Calcule la matriz representante en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ tanto en el espacio de salida como en el espacio de llegada.

b) (2.0 ptos.) Dé una base del núcleo y otra de la imagen de la transformación. Determine la dimensión de ambos espacios.

c) (2.0 ptos.) Decida, justificando apropiadamente, si la transformación es inyectiva y epiyectiva (sobreyectiva).

P2. Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el conjunto de polinomios en la variable x de grado menor o igual a 2 con coeficientes reales. Se define la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ por

$$T\left(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right) = (a_1 + a_3)x^2 + (a_0 + a_1)x + (a_2 - a_3).$$

a) (2.0 ptos.) Calcule la matriz representante de T con respecto a las bases canónicas de ambos espacios. Es decir:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} = \left\{ x^2, x, 1 \right\}.$$

b) (4.0 ptos.) Calcule, utilizando matrices de cambio de base, la matriz representante de T en las bases:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} = \left\{ x^2 + x + 1, x + 1, 1 \right\}.$$

P3. *a*) (3.0 ptos) Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ como en la **P2**. Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal y A su matriz representante en la base $\mathcal{B}_1$ en el espacio de partida y $\mathcal{B}_2$ en el espacio de llegada, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}_1 = \{1 + x + x^2, x, x^2\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \{1 + 2x + 3x^2, 1 + 2x, 3\}.$$

Calcule el polinomio $T(1 + 2x + 3x^2)$.

<u>Indicación</u>: Use la matriz A para calcular la imagen por T de cada elemento en $\mathcal{B}_1$.

b) (3.0 ptos.) Sean $T : U \to V$ y $L : V \to W$ transformaciones lineales donde U, V y W son espacios vectoriales de dimensión $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pruebe que si T o (disyunción) L no es biyectiva, entonces $dim(L \circ T) < n$.

<u>Indicación</u>: Si le es útil, puede usar el Teorema de Núcleo e Imagen (TNI).

Tiempo: 3.0 hrs.