Control 2 - Otoño 2024

P1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por:

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x + y + 3z \\ x + 2y + z \\ 3x + 3y + 4z \end{pmatrix}.$$

a) (2.0 ptos.) Calcule la matriz representante en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ tanto en el espacio de salida como en el espacio de llegada.

Solución: Necesitamos calcular T para cada vector de la base canónica (asignar (0,4 pts.) por cada vector bien calculado):

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Luego, como estos vectores coinciden con sus coordenadas en la base canónica, la matriz representante T es :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Asignar (0,8 pts.) por haber armado bien la matriz.

Un alternativa es simplemente darse cuenta que

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se vio en clases que la matriz que aparece es la buscada. Dar todo el puntaje en este caso.

b) (2.0 ptos.) Dé una base del núcleo y otra de la imagen de la transformación. Determine la dimensión de ambos espacios.

Solución: Para calcular el núcleo resolvemos un sistema hmogeneo de ecuaciones escalonando:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego: $z = 3y, x = -5y$ $\qquad \mathcal{B}_{Ker} = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Cuidado, cualquier vector que sea múltiplo de este es correcto.

Asignar (0,4 pts.) por hacer bien este cálculo, si no hallaron bien la matriz representante, pero calculan bien con la matriz hallada el núcleo para esa matriz, es decir resuelven bien el sistema homogéneo, asignar el puntaje completo de esta parte.

Otros (0,3 pts) por escribir una base.

Otros (0,3 pts) por explicitar correctamente la dimensión del espacio. $Dim(Ker(T) = 1$

En lo anterior hay que verificar bien como fueron escalonando y como se tomó la variable libre. En la mayoría de las secciones tomarán la variable z y no la y como sale aquí.

Para obtener una base de la imagen, sabemos que ésta está generada por las columnas de la matriz representante, también por TNI, dado que el núcleo tiene dimensión 1, sabemos que la imagen tiene dimensión 2, luego basta tomar dos vectores linealmente independientes que estén en la imagen y formarán una base de la misma:

$\mathcal{B}_{Im} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ que claramente están en la imagen y siendo dos vectores para ver que son L.I. basta ver que uno no es múltiplo del otro.

Asignar (0,6 pts.) por justificar correctamente que dos de los vectores columna de la matriz forman una base de la imagen. Nuevamente si la matriz hallada no es correcta, asignar el puntaje si resolvieron correctamente para la matriz hallada los vectores que forman una base de la imagen.

Otros (0,2 pts) por escribir una base.

Otros (0,2 pts) por decidir la dimensión del espacio.

En lo anterior también es más clásico escalonar la matriz y quedarse con las columnas que terminaron generando inicios de escalón. Usar criterio pues hay muchas maneras de hacer este ejercicio.

c) (2.0 ptos.) Decida, justificando apropiadamente, si la transformación es inyectiva y epiyectiva (sobreyectiva).

Solución:

Dado que el núcleo tiene dimensión 1 sabemos que la transformación no es inyectiva, para justificar que no es epiyectiva, basta ver que el espacio de llegada tiene dimensión 3 y la imagen dimensión 2.

Asignar los dos puntos si justifican correctamente. (1 punto por cada caso)

P2. Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el conjunto de polinomios en la variable x de grado menor o igual a 2 con coeficientes reales. Se define la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ por

$$T\left(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right) = (a_1 + a_3)x^2 + (a_0 + a_1)x + (a_2 - a_3).$$

a) (2.0 ptos.) Calcule la matriz representante de T con respecto a las bases canónicas de ambos espacios. Es decir:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} = \left\{ x^2, x, 1 \right\}.$$

Solución:

Calculando T en cada vector de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y calculando las coordenadas de la solución en la base canónica de $\mathcal{B}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}$, usando estos resultados en orden en la matriz como columnas, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si calcularon bien la matriz tienen los 2 puntos, en el caso de que calculen T en cada vector asignar 0,4 ptos por cada uno y 0,4 por la matriz final.)

b) (4.0 ptos.) Calcule, utilizando matrices de cambio de base, la matriz representante de T en las bases:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} = \left\{ x^2 + x + 1, x + 1, 1 \right\}.$$

Solución:

Necesitamos, multiplicar la matriz obtenida en (a) por matrices de cambio de base, por la derecha una matriz que lleve los vectores de la nueva base de $\mathbb{R}^4$ en los vectores de la base canónica, y por la izquierda una matriz que lleve los vectores de la base canónica de $\mathcal{B}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}$ en la nueva base de este espacio.

Para la primera matriz, debemos ver cómo se escriben los vectores de la nueva base en la base canónica, es decir buscar sus coordenadas, y es claro que coinciden con cada uno de los vectores. Esta matriz es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1 punto por haber encontrado correctamente la matriz.

Para la segunda matriz debemos ver cómo se escriben los vectores de la base canónica en la nueva base: Esta matriz será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En esta hay que hacer más cálculos (pueden encontrar primero la inversa, que se construye escribiendo como columnas los vectores de la base nueva y luego invertirla o hacer el cálculo de cómo se escribe cada vector de la base canónica en la nueva base.

Distribuir un punto por hacerlo correctamente.

La nueva matriz representante en estas bases será el producto de estas tres matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Por escribir en el orden correcto el producto de las tres matrices aclarando que esta es la matriz en las nuevas bases 1,5 puntos. Realizar correctamente la multiplicación 0,5 puntos.

P3. *a*) (3.0 ptos) Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ como en la **P2**. Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal y A su matriz representante en la base $\mathcal{B}_1$ en el espacio de partida y $\mathcal{B}_2$ en el espacio de llegada, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}_1 = \{1 + x + x^2, x, x^2\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \{1 + 2x + 3x^2, 1 + 2x, 3\}.$$

Calcule el polinomio $T(1+2x+3x^2)$.

Indicación: Use la matriz A para calcular la imagen por T de cada elemento en $\mathcal{B}_1$.

Solución: Primero debemos ver: ¿Cómo se escribe $1+2x+3x^2$ como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}_1$?

$$1+2x+3x^2 = 1(1+x+x^2)+1(x)+2(x^2)$$

Un punto por hacer esto.

Conociendo estos coeficientes, debemos multiplicar el vector de los coeficientes, $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, por la matriz representante:

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$ Un punto por calcular esto.

Para conocer cuál es la imagen del polinomio que estamos buscando, utilizamos el resultado para obtener la combinación lineal de los vectores de la base de llegada:

$2(1+2x+3x^2)+4(1+2x)+3.(3) = 6x^2+12x+15$
Un punto por este cálculo.
Otra forma:
1) Calcular las matrices de cambio de base para obtener la matriz representante en la base canónica y multiplicar esta matriz por el vector $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.

b) (3.0 ptos.) Sean $T : U \to V$ y $L : V \to W$ transformaciones lineales donde U, V y W son espacios vectoriales de dimensión $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pruebe que si T o (disyunción) L no es biyectiva, entonces $dim(L \circ T) < n$.

Indicación: Si le es útil, puede usar el Teorema de Núcleo e Imagen (TNI).

Solución:

Basta ver que como U, V y W son espacios vectoriales de dimensión $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ estas tres transformaciones, T, L y $L \circ T$ son biyectivas si y sólo si son inyectivas. (corolario del TNI) que nos dice que una transformación lineal que va de un espacio en otro de la misma dimensión es inyectiva si y sólo si es epiyectiva, si y sólo si es biyectiva.

1 punto por conocer el resultado y aclararlo.

Luego, si T no es inyectiva existe un vector $u \neq 0$, tal que $T(u) = 0$, luego $L \circ T(u) = 0$ por lo que $L \circ T$ no es inyectiva, lo que implica que no es biyectiva.

1 punto por justificar esto.

Si en cambio T es inyectiva será biyectiva, lo que implica por hipótesis que L no lo es. Luego existe un $v \neq 0$ tal que $L(v) = 0$ como T es epiyectiva, existe un u tal que $T(u) = v$ y $L \circ T(u) = L(v) = 0$ por lo que $L \circ T$ no es inyectiva, por lo tanto no es biyectiva.

1 punto por esta justificación.

Tiempo: 3.0 hrs.