Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal MA1102-2024-1

Control 1 - Otoño 2024

P1. Considere el siguiente sistema lineal de ecuaciones reales donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0, \\ ax_1 & - & x_2 & + & ax_3 & - & x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & ax_2 & - & x_3 & + & ax_4 & = & b. \end{array}$$

(a) (4.0 pts.) Determine para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$ el sistema:

i) No tiene solución.

ii) Tiene infinitas soluciones.

iii) Argumente por qué el sistema no puede tener solución única.

(b) (2.0 pts.) Fije $a \neq -1,\ b = -1$ y encuentre (o exprese) todas las soluciones del sistema lineal en función del parámetro a.

P2. (a) (3.5 pts.) Determine si la siguiente matriz es invertible y, en caso de serlo, calcule su inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R}).$$

(b) (i) (1.0 pto.) Sea $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Pruebe que para todo entero $m \geq 1$ se tiene:

$$(I - A) \cdot (I + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{m-1}) = I - A^m.$$

(ii) (1.5 ptos.) Considere $N \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tal que $N^m = 0$ (igual a la matriz nula) para un entero $m \geq 1$. Probar, usando la parte anterior, que $(I - N)$ e $(I + N)$ son invertibles y calcule sus inversas.

P3. En el espacio vectorial $M_{2,3}(\mathbb{R})$ se definen:

$$U = \{A \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \mid A_{1,1} + A_{2,2} + A_{1,3} = 0\},$$
$$V = \{A \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \mid A_{2,1} + A_{1,2} + A_{3,3} = 0\}.$$

a) (1.5 ptos.) Pruebe que U es un sub-espacio vectorial de $M_{2,3}(\mathbb{R})$ con $\dim(U) = 5$ y dé una base de U.

b) (1.5 ptos.) Sea $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pruebe que $V = \{M \cdot A \mid A \in U\}$ y que si $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ es una base de U entonces $\{M \cdot A_1, M \cdot A_2, M \cdot A_3, M \cdot A_4, M \cdot A_5\}$ es una base de V.

c) (1.5 ptos.) Encuentre una base y dé dimensión de $U \cap V$. ¿Puede ser $U + V$ una suma directa?

d) (1.5 ptos.) Probar que los siguientes vectores forman una base de $U + V$ (puede usar argumentos de dimensionalidad):

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tiempo: 3.0 hrs.