Pauta Control 1 - Otoño 2024

P1. Considere el siguiente sistema lineal de ecuaciones reales donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0, \\ ax_1 & - & x_2 & + & ax_3 & - & x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & ax_2 & - & x_3 & + & ax_4 & = & b. \end{array}$$

(a) (4.0 pts.) Determine para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$ el sistema:

i) No tiene solución.

ii) Tiene infinitas soluciones.

iii) Argumente por qué el sistema no puede tener solución única.

(b) (2.0 pts.) Fije $a \neq -1,\ b = -1$ y encuentre (o exprese) todas las soluciones del sistema lineal en función del parámetro a.

Pauta P1.

(a) Partimos escribiendo el sistema lineal de forma matricial:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ a & -1 & a & -1 & | & 1 \\ -1 & a & -1 & a & | & b \end{array}\right).$$

Ahora escalonamos usando operaciones elementales: $E^{1,2}(-a, 1)$ y $E^{1,3}(1, 1)$ para obtener,

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -(1+a) & 0 & -(1+a) & | & 1 \\ 0 & 1+a & 0 & 1+a & | & b \end{array}\right).$$

Ahora, usando la operación $E^{2,3}(1, 1)$ obtenemos,

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -(1+a) & 0 & -(1+a) & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1+b \end{array}\right).$$

[Dar 1.5 ptos. por escalonar bien. No descontar puntaje si no especifican las matrices elementales con que operan. Desgloce: 0,5 por escribir bien el siestema matricial, 1 punto por escalonar correctamente, descontar 0,5 por error]

Ahora ya podemos analizar el sistema:

- (0,5 pts.) Si $a = -1$ la segunda ecuación queda incompatible, luego el sistema NO tiene solución.
- (0,5 pts.) Si $b \neq -1$ entonces el sistema NO tiene solución pues la última ecuación es incompatible.
- (1 pto.) Si $a \neq -1, b = -1$, el sistema queda escalonado con dos variables libres, x_3 y x_4. Obtenemos un sistema con infinitas soluciones.
- (0,5 pts.) El sistema no puede tener solución única, pues hay más variables que ecuaciones, lo que hace que no podamos definir todas las variables. O argumentar que hay variables libres. También puede argumentarse diciendo que la matriz asociada no tiene inversa, dado que tiene más columnas que filas.

[Dar 1 pto. por identificar cuando no hay solución y 1.0 pto. por identificar cuando hay infinitas, 0.5 por argumentar por qué no puede haber solución única. Si el escalonamiento estaba malo, no volver a penalizar, considerar que la respuesta sea consistente con el escalonamiento.]

(b) Por la parte anterior sabemos que si $a \neq -1$ y $b = -1$, entonces x_3 y x_4 son variables libres y el sistema tiene infinitas soluciones. La segunda ecuación nos entrega $x_2 = -\frac{1}{1+a} - x_4$, y la primera ecuación $x_1 = \frac{1}{1+a} - x_3$. ¡Cuidado! Es correcto despejar cualquiera de las dos variables que pueden despejar en función de las otras dos.

[Dar 2 ptos. si todo bueno y bajar de a 0.5 ptos. por cada error. No hace falta que expliciten çon nombre que la variable es libre". pueden dejar la solución en función de otras dos variables, también es correcto. Pueden escribir las soluciones de esta forma o como conjunto de vectores, dando el espacio afín.]

P2. (a) (3.5 pts.) Determine si la siguiente matriz es invertible y, en caso de serlo, calcule su inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R}).$$

(b) (i) (1.0 pto.) Sea $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Pruebe que

$$(I - A) \cdot (I + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{m-1}) = I - A^m$$

para todo entero $m \geq 1$.

(ii) (1.5 ptos.) Considere $N \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tal que $N^m = 0$ (igual a la matriz nula) para un entero $m \geq 1$. Probar, usando la parte anterior, que $(I - N)$ e $(I + N)$ son invertibles y calcule sus inversas.

Pauta P2.

(a) Para ver que A es invertible basta escalonar hasta dejar un pivote por columna. Para invertir A, basta seguir escalonando hasta encontrar la inversa:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Usando la operación $E^{1,2}(-1,1)$ obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora intercambiamos filas 2 y 3:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Seguimos con la operación $E^{3,4}(-1,1)$ y obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora sabemos que la matriz es invertible, dado que está escalonada y no tiene ceros en la diagonal. (hasta aquí 1,5) Ahora escalonamos hacia arriba usando la operación $E^{4,2}(-1,1)$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seguimos con $E^{3,2}(-1,1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Terminamos con $E^{2,1}(-1,1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Dar los 3.5 ptos. si se llega bien al final y 1.5 ptos. si hubo un error en el medio de escalonamiento pero se llegó a concluir, si cometieron errores al escalonar, por alguna cuenta mal hecha, pero concluyen correctamente que la matriz que obtuvieron es invertible o no lo es dependiendo de si la matriz es o no invertible dar 1 pt.o de esos 0,5 pts. No descontar puntaje si no especifican las matrices elementales con que operan.]

(b) (i) Usando propiedades del producto y suma de matrices obtenemos que,

$$(I-A)\cdot\sum_{i=0}^{m-1} A^i = \sum_{i=0}^{m-1} A^i - \sum_{i=0}^{m-1} A^{i+1} = \sum_{i=0}^{m-1}(A^i - A^{i+1}) = I - A^m,$$

donde en la última igualdad usamos la propiedad telescópica.
[Se da 1 pto. por hacer el cálculo completo. Descontar a lo más dos veces 0.5 ptos. por cada error.]

(ii) si $m = 1$ tenemos que $N = 0$ la matriz cero, luego $(I - N) = I = (I + N)$ claramente invertible. **[Dar 0.1 ptos.]**
Usando la propiedad de la parte anterior, para $m > 1$ tenemos que:

$$(I-N)\cdot\sum_{i=0}^{m-1} N^i = I - N^m = I$$

luego $(I - N)$ es invertible y $\sum_{i=0}^{m-1} N^i$ es su inversa.
[Dar 0.7 ptos.]
De la misma manera, tenemos que:

$$(I+N)\cdot\sum_{i=0}^{m-1} (-N)^i = I - (-N)^m = I$$

luego $(I + N)$ es invertible y $\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i N^i$ es su inversa.
[Dar 0.7 ptos.]

P3. En el espacio vectorial $M_{2,3}(\mathbb{R})$ se definen:

$$U = \{A \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \mid A_{1,1} + A_{2,2} + A_{1,3} = 0\},$$
$$V = \{A \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \mid A_{2,1} + A_{1,2} + A_{2,3} = 0\}.$$

a) (1.5 ptos.) Pruebe que U es un sub-espacio vectorial de $M_{2,3}(\mathbb{R})$ con $\dim(U) = 5$ y dé una base de U.

b) (1.5 ptos.) Sea $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pruebe que $V = \{MA \mid A \in U\}$ y que si $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ es una base de U entonces $\{MA_1, MA_2, MA_3, MA_4, MA_5\}$ es una base de V.

c) (1.5 ptos.) Encuentre una base y dé dimensión de $U \cap V$. ¿Puede ser $U + V$ una suma directa?

d) (1.5 ptos.) Probar que los siguientes vectores forman una base de $U + V$ (puede usar argumentos de dimensionalidad):

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pauta P3.

(a) En primer lugar observemos que $U \neq \emptyset$ pues la matriz nula es parte de U (basta sumar las 3 coordenadas respectivas). Ahora, consideremos dos matrices $A, B \in U$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\begin{aligned}(\alpha A + B)_{1,1} + (\alpha A + B)_{2,2} + (\alpha A + B)_{1,3} &= \alpha A_{1,1} + B_{1,1} + \alpha A_{2,2} + B_{2,2} + \alpha A_{1,3} + B_{1,3} \\ &= \alpha(A_{1,1} + A_{2,2} + A_{1,3}) + (B_{1,1} + B_{2,2} + B_{1,3}) \\ &= \alpha \cdot 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

donde en penúltima igualdad usamos que $A, B \in U$. Esto termina probando que U es s.e.v. [**Dar 0.5 ptos. si se llegó bien acá, es decir, si se probó correctamente que U es s.e.v. de $M_{2,3}(\mathbb{R})$ (notar que se puede también argumentar que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A, B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ se tiene que $\alpha A + \beta B \in U$)**]
Para buscar una base observemos que un elemento tipo de este espacio, resolviendo el sistema lineal, es de la forma:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(A_{1,3} + A_{2,2}) & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{pmatrix} \\ &= A_{1,2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{1,3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{2,1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{2,2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + A_{2,3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Una verificación simple dice que cada una de estas 5 matrices están en U. Finalmente, una combinación lineal nula (usando mismos coeficientes de la última ecuación) se puede producir si y solamente si $A_{1,,3} = A_{1,2} = A_{2,1} = A_{2,2} = A_{2,3} = 0$, lo que prueba que son l.i.
Hemos encontrado una base de U (las 5 matrices), luego la $\dim(U) = 5$. [**Dar 1 pto. si se llegó bien hasta acá, es decir, si se encontró una base correcta de U. Separar 0,7 puntos por encontrar una base y 0,3 por dar bien la dimensión.**]

(b) Sea $B \in V$. Un cálculo simple muestra que

$$B = M \begin{pmatrix} B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \end{pmatrix}.$$

Como $B_{2,1} + B_{1,2} + B_{3,3} = 0$ tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \end{pmatrix} \in U.$$

Lo que muestra que $B = MA$ con $A \in U$, como se deseaba.

Recíprocamente, sea $A \in U$. Se tiene que

$$B = \begin{pmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \end{pmatrix} = MA,$$

y como $A_{1,1} + A_{2,2} + A_{1,3} = 0$, entonces $B \in V$. Esto concluye la demostración de $V = \{MA \mid A \in U\}$.
[Dar 0.5 ptos. por cada inclusión correctamente demostrada.]

Ahora, si $B \in V$, entonces por lo recién probado B se puede escribir como $B = MA$ con $A \in U$. Usando la base de U dada, podemos escribir,

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 + \alpha_5 A_5,$$

de manera única. Multiplicando por M tenemos que:

$$B = MA = \alpha_1 MA_1 + \alpha_2 MA_2 + \alpha_3 MA_3 + \alpha_4 MA_4 + \alpha_5 MA_5.$$

Esto prueba que los 5 vectores propuestos son un generador de V. Para terminar hay que probar que estos son l.i.

Para ello estudiemos los valores de $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ en la expresión siguiente:

$$\alpha_1 MA_1 + \alpha_2 MA_2 + \alpha_3 MA_3 + \alpha_4 MA_4 + \alpha_5 MA_5 = 0$$

(con 0 la matriz nula). Pero M es invertible y su inversa es M, luego multiplicando por M obtenemos:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 + \alpha_5 A_5 = 0.$$

Pero las matrices $A_1, \ldots, A_5$ con l.i., luego $\alpha_1 = \ldots = \alpha_5 = 0$. Esto termina probando que los vectores propuestos son una base de V.

[Dar 0.5 ptos. por la l.i. y la conclusión.]

(c) Para buscar una base de $U \cap V$ escribamos un elemento típico de este s.e.v.:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(A_{1,3} + A_{2,2}) & A_{1,2} & A_{1,3} \\ -(A_{1,2} + A_{2,3}) & A_{2,2} & A_{2,3} \end{pmatrix} \\ &= A_{1,2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{1,3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{2,2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + A_{2,3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es decir, cada elemento de $U \cap V$ es combinación lineal de estas 4 matrices que son l.i. evidentemente y pertenecen a $U \cap V$. Luego, hemos encontrado una base de este s.e.v. y su dimensión es 4. Como la intersección no contiene solo al 0, la suma de U con V no puede ser directa.

[Dar 0,7 pto. por base y 0,3 pts. por la dimensión, y 0.5 ptos. por responder bien lo de la suma directa.]

(d) Dada la fórmula vista en clases se tiene que

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 5 + 5 - 4 = 6.$$

Como sabemos que la dimensión de $U + V$ es 6, lo único que debemos probar es que el conjunto de matrices dada es l.i. y que cada una de ellas está en $U + V$.

(También se puede argumentar diciendo que los 6 vectores dados están en $U + V$ y generan $U + W$ por lo que deben ser l.i.– este último argumento no se detalla en esta pauta)

Es directo que las primeras 4 matrices están en $U \cap V$ (basta hacer las sumas de las coordenadas), la penúltima está en U y la última en V.

Para probar la independencia, partimos escribiendo una combinación lineal nula de estas matrices y buscamos que valores deben tener sus coeficientes para que esto sea cierto:

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mirando coordenadas obtenemos el sistema lineal homogéneo, en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

De aquí obtenemos directamente (no hay que escalonar) que $\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_4 = 0$. Despejando, sigue que $\alpha_6 = 0$ y $\alpha_5 = 0$. Luego, las matrices son independientes y hemos probado que es una base de $U + V$.

[Dar 0.7 ptos. por argumentos de dimensionalidad y 0.8 ptos. por probar que las 6 matrices son l.i. (o que generan $U + W$)]