Control 3

P1. Sea $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -7 & 4 & 13 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) (2 ptos.) Calcule los valores propios de la matriz.

b) (2 ptos.) Para los valores hallados calcule los espacios propios asociados a cada uno de ellos, es decir, para cada valor propio calcule todos los vectores propios asociados.

c) (2 ptos.) Decida si la matriz es diagonalizable. En caso de serlo calcule las matrices de cambio de base que permiten diagonalizarla y dé la matriz diagonal correspondiente.

P2. *a*) (3 ptos.) Diga cuál de las siguientes matrices es diagonalizable y cuál no, justificando debidamente su respuesta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Sea $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

1) (1 pto.) Argumente que el polinomio característico de A, es decir p_A, admite una raíz real.
<u>Indicación</u>: Observe que p_A tiene grado 3.

2) (1 pto.) Pruebe que si para todo $v \in \mathbb{R}^3$, $\|Av\| = \|v\|$, entonces el núcleo de A es igual a $\{0\}$ (es decir, $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$) y concluya que 0 no es valor propio de A.

3) (1 pto.) Asumiendo que A satisface las condiciones del punto anterior, concluya que $+1$ o -1 es valor propio de A.

P3. Sea $A \in M_{8,8}(\mathbb{R})$ una matriz cuyos valores propios son $\alpha = 2$, $\beta = 0$ y $\gamma = 3$ de multiplicidades algebraicas 2, 1 y 5, respectivamente. Sean además U, V, W los subespacios de vectores propios de A tales que

$$\begin{aligned} U &= \langle \{e_1\} \rangle, \\ V &= \langle \{e_2 - e_3, e_2, e_3\} \rangle, \\ W &= \langle \{e_5, e_6 + e_7, e_6 - e_7, e_8, e_4 - e_5, e_4 + e_8\} \rangle, \end{aligned}$$

donde $\{e_1, ..., e_8\}$ es la base de canónica de $\mathbb{R}^8$.

a) (2 ptos.) Encuentre bases ortonormales para U, V y W.

b) (2 ptos.) Para cada espacio de vectores propios U, V y W, indique a qué valor propio α, β o γ está asociado. Justifique su respuesta.

c) (2 ptos.) Pruebe que usando las bases encontradas en a) se puede diagonalizar A en la forma $A = PDP^T$, con D matriz diagonal. Concluya que A es simétrica.

Duración: 3 horas.