Control 3

P1. Sea $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -7 & 4 & 13 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) (2 ptos.) Calcule los valores propios de la matriz.

Solución:

Para calcular los valores propios de la matriz, calculamos las raíces del polinomio característico de la misma.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & -1 \\ -7 & 4-\lambda & 13 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix}.$$

0,5 por plantear correctamente el polinomio

Desarrollando el determinante por la segunda columna (esto simplifica los cálculos, puede hacerse con cualquiera de ellas, obtenemos:

$$p(\lambda) = -(4-\lambda)\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = -(4-\lambda)((-1-\lambda)(-3-\lambda)+1) = (\lambda-4)(\lambda+2)^2$$

1 punto por calcular correctamente el polinomio

Las raíces son: $\lambda = 4$ con multiplicidad algebraica 1 y $\lambda = -2$ con multiplicidad algebraica 2

0,5 por decir correctamente cuáles son los valores propios, cuidado, el enunciado no pide las multiplicidades, está por completitud, pero no descontar.

b) (2 ptos.) Para los valores hallados calcule los espacios propios asociados a cada uno de ellos, es decir, para cada valor propio calcule todos los vectores propios asociados.

Solución:

Para calcular los vectores propios de la matriz, calculamos las el Kernel de $(A - \lambda I)$ para cada una de las raíces.

0,4 por definir correctamente cómo se calculan los vectores, cuidado, estos puntos son válidos también si lo hacen directamente en al menos uno de los casos.

Para $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} -1-4 & 0 & -1 \\ -7 & 4-4 & 13 \\ 1 & 0 & -3-4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ -7 & 0 & 13 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando: (intercambiamos f_1 y f_3, luego $7f_1+f_2 -> f_2$ y $5f_1+f_3 -> f_3$ y finalmente $f_2+f_3 -> f_3$

y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ -7 & 0 & 13 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} -> \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ -7 & 0 & 13 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix} -> \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & -36 \end{pmatrix} -> \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0,2 realizar correctamente los cálculos

De aquí $z = x = 0$ Y el vector propio que genera el espacio de vector propio asociado a 4 es $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

0,6 por encontrar correctamente el vector, cuidado: puede ser calquier múltiplo del mismo!!!

Analicemos el espacio asociado a $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} -1+2 & 0 & -1 \\ -7 & 4+2 & 13 \\ 1 & 0 & -3+2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -7 & 6 & 13 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando: $f_2 + f_1 -> f_2$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -7 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0,2 realizar correctamente los cálculos

Luego tenemos $x = z$ y $6x + 6y = 0$ entonces $y = -x$ Lo que nos dice que

$$W_{-2} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

0,6 por encontrar correctamente el vector, cuidado: puede ser calquier múltiplo del mismo!!!

c) (2 ptos.) Decida si la matriz es diagonalizable. En caso de serlo calcule las matrices de cambio de base que permiten diagonalizarla y dé la matriz diagonal correspondiente.

Solución: Con lo calculado en (a) y (b) obtenemos que la multiplicidad algebraica para el valor propio -2 no coincide con la geométrica, por lo que la matriz no es diagonalizable, no existe base de vectores propios, no hay nada que calcular!

Basta que expliquen diciendo que la raíz tiene multiplicidad 2 y que hay sólo un vector propio asociado.

2 puntos por explicarlo correctamente.

P2. *a*) (3 ptos.) Diga cuál de las siguientes matrices es diagonalizable y cuál no, justificando debidamente su respuesta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solución: Para la matriz A basta ver que dado que es diagonal superior, su polinomio característico será $(1-x)(3-x)$ Tiene todos valores propios de multiplicidad algebraica 1 y por lo tanto siempre hay un vector propio asociado a cada uno. Luego hay base de vectores propios, lo que implica que es diagonalizable.

1 punto por explicar correctamente que es diagonalizable, pueden haber calculado, pero no es necesario!

Para B También el polinomio se calcula como producto de la diagonal y es $(x-1)^2(x-2)$
En este caso, basta ver que el espacio de vectores propios asociado al 1 tiene dimensión 1 para decir que no es diagonalizable.
Para eso, si no lo ven por construcción pueden calcular el Kernel de:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

, que claramente tiene dimensión 1 ($y=0, z=0, x$ libre).
1 punto por explicar correctamente que no es diagonalizable
Para la matriz C basta decir que la matriz es simétrica con valores en $\mathbb{R}$ por lo tanto es diagonalizable.
1 punto por explicar correctamente que es diagonalizable

b) Sea $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

1) (1 pto.) Argumente que el polinomio característico de A, es decir p_A, admite una raíz real.
Indicación: Observe que p_A tiene grado 3.

Solución:
Como la matriz es de 3×3 el polinomio característico tiene grado 3. Usando el teorema fundamental del álgebra, sabemos que las raíces complejas aparecen de a pares, si z es raíz, también lo es su conjugado, por lo tanto tiene al menos una raíz real.
Pueden argumentarlo también con resultados de cálculo, el polinomio es continuo, sus límites a infinito y menos infinito son uno infinito y el otro menos infinito, siendo función continua en algún momento corta el cero (raíz real).
Cualquiera de las dos argumentaciones obtienen 1 punto

2) (1 pto.) Pruebe que si para todo $v \in \mathbb{R}^3$, $\|Av\| = \|v\|$, entonces el núcleo de A es igual a $\{0\}$ (es decir, $\text{Ker}(A) = \{0\}$) y concluya que 0 no es valor propio de A.

Solución: Supongamos que existe $v \neq 0$ tal que $Av = 0$, entonces $0 = \|Av\| = \|v\| \neq 0$, lo que nos lleva a una contradicción. Luego cero no es valor propio.
0,5 por el planteo, 0,5 por concluir

3) (1 pto.) Asumiendo que A satisface las condiciones del punto anterior, concluya que $+1$ o -1 es valor propio de A.

Solución:
Sabemos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ y $v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ tal que $Av = \lambda v$ 0,3 puntos
Además: $\|Av\| = \|v\|$, para ese vector: $\|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| = \|v\|$
0,3 puntos
Luego $|\lambda| = 1$ y $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$
0,4 puntos

P3. Sea $A \in M_{8,8}(\mathbb{R})$ una matriz cuyos valores propios son $\alpha = 2$, $\beta = 0$ y $\gamma = 3$ de multiplicidades algebraicas 2, 1 y 5, respectivamente. Sean además U, V, W los subespacios de vectores propios de A tales que

$$\begin{aligned} U &= \langle \{e_1\} \rangle, \\ V &= \langle \{e_2 - e_3, e_2, e_3\} \rangle, \\ W &= \langle \{e_5, e_6 + e_7, e_6 - e_7, e_8, e_4 - e_5, e_4 + e_8\} \rangle, \end{aligned}$$

donde $\{e_1, ..., e_8\}$ es la base de canónica de $\mathbb{R}^8$.

a) (2 ptos.) Encuentre bases ortonormales para U, V y W.

Solución: Es importante notar que el espacio tiene dimensión 8, y que las multiplicidades algebraicas suman 8, luego la suma de las dimensiones de los espacios propios es como máximo 8.

No es necesario que lo digan inicialmente, pero deben usarlo en algún momento. 0,3 puntos

$U = \{e_1\}$, es base, dado que es un solo vector, LI, y es ortonormal, pues el vector tiene norma 1.

0,3 puntos En el caso de V, claramente el primer vector es combinación lineal de los otros dos, y los otros dos son linealmente independientes entre sí, además de ser ortogonales (su producto es cero) y de norma 1, luego una base ortonormal de V es $\beta_V = \{e_2, e_3\}$

0,5 por dar una base ortonormal correcta, si se quedan con el primer vector esto implicará hacer un G-S Hasta ahora tenemos un espacio de dimensión 1 y uno de dimensión 2 que coinciden con la multiplicidad algebraica de α y β. Por lo que si tenemos "suerte.$^{\text{el}}$ otro espacio tendrá dimensión 5, lo que sabemos es que no puede tener dimensión mayor a 5.

esta es otra forma de argumentar lo argumentado sobre las dimensiones al principio, y es válido para obtener el puntaje asignado por ello Posibilidades:

Decir que el conjunto $\beta_W = \{e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ genera el mismo subespacio que el conjunto generador de W (cada uno de los vectores se escribe como combinación lineal de estos nuevos vectores) y además es LI, por lo que es base.

También pueden escalonar y quedarse con un conjunto de 5 vectores LI.

Si notaron que el conjunto podía ser el propuesto, basta argumentar que es ortonormal, como en el anterior. Si no puede que hagan un pequeño G-S.

0,3 por calcular una base, otros 0,3 por ortonormalizarla, en el caso de que la den directamente ortonormal, tienen el puntaje completo.

b) (2 ptos.) Para cada espacio de vectores propios U, V y W, indique a qué valor propio α, β o γ está asociado. Justifique su respuesta.

Solución:

$\beta = 0$ tiene multiplicidad algebraica 1 y debe tener exactamente un vector propio asociado, por lo que sólo puede estar asociado al vector e_1.

$\alpha = 2$ tiene multiplicidad 2 por lo que el espacio de vectores propios asociado tiene dimensión 1 o 2, pero dado que el espacio U está asociado al valor propio 0, la única posibilidad es que el espacio asociado sea el V que tiene dimensión 2.

$\gamma = 3$ tiene multiplicidad algebraica 5, y la única posibilidad es que su espacio asociado sea W, además coincide la dimensión con la multiplicidad algebraica.

2 puntos si argumentan correctamente las 3. en el caso de que haya alguna incorrecta descontar 0,5 por cada una que no esté bien argumentada, si es que hay alguna correcta. y en el caso de que estén todas mal, nada.

Además la unión de estas bases nos da una base ortonormal, en los hecho aquí es exactamente la canónica, pero puede haber quedado otra!

c) (2 ptos.) Pruebe que usando las bases encontradas en a) se puede diagonalizar A en la forma $A = PDP^T$, con D matriz diagonal. Concluya que A es simétrica.

Solución: En la forma en la que armamos la base...

$A = IDI$

Luego A es diagonal

2 puntos...

Si la base que les quedó no es la canónica:

Deben argumentar que dado que la base de vectores propios es ortonormal la matriz A es simétrica y puede escribirse como $A = PDP^T$.

2 puntos...

Duración: 3 horas.