Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal MA1102-2023-1

Control 2

P1. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_2[x]$ (los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que 2) la función tal que

$$T(u) = (u_1 + u_4) + (u_2 + u_3)x + (u_1 + u_2 + 2u_3 + u_4)x^2$$

donde u_1, u_2, u_3, u_4 son las coordenadas de $u \in \mathbb{R}^4$.

a) (2 ptos.) Pruebe que T es una transformación lineal.

b) (2 ptos.) Calcular la matriz representante de T con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}_2[x]$ respectivamente.

c) (2 ptos.) Usando matrices de cambio de base y la matriz encontrada en b), calcular la matriz representante de T con respecto a las bases

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \mathcal{B}_2 = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$$

respectivamente.

P2. Sea $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ y $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $T_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Suponga que: $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y que el núcleo de T_A está generado por $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

a) (1.5 ptos.) Dar una base y la dimensión del núcleo de T_A (Indicación: reduzca el generador a una base).

b) (1.5 ptos.) Dar una base y la dimensión de $Im(T_A)$.

c) (1.5 ptos.) Indique si T_A es inyectiva y si es sobreyectiva, justifique su respuesta.

d) (1.5 ptos.) Encuentre explícitamente la matriz A (Indicación: pruebe que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ y calcule las coordenadas de cualquier punto de $\mathbb{R}^3$ en esta base).

P3. *a*) (3 ptos.) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que verifica que $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $T\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pruebe que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \end{pmatrix}$ en todo $x, y \in \mathbb{R}$ (Indicación: pruebe que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y calcule las coordenadas de cualquier punto de $\mathbb{R}^2$ en esta base).

b) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$.

1) (1 pto.) Pruebe que $Ker(T) \cap Im(T) = \{0\}$ (Obs.: $Ker(T)$ es el núcleo de T).
2) (1 pto.) Pruebe que $dim(Ker(T) + Im(T)) = n$.
3) (1 pto.) Concluir, usando argumentos de dimensionalidad, que $\mathbb{R}^n = Ker(T) \oplus Im(T)$.

Duración: 3h.