Pauta Control 2

P1. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_2[x]$ (los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que 2) la función tal que

$$T(u) = (u_1 + u_4) + (u_2 + u_3)x + (u_1 + u_2 + 2u_3 + u_4)x^2$$

donde u_1, u_2, u_3, u_4 son las coordenadas de $u \in \mathbb{R}^4$.

a) (2 ptos.) Pruebe que T es una transformación lineal.

Respuesta: Se pueden usar mucho criterios, por ejemplo: $T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v)$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^4$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ (1.0 pto. por enunciar un criterio válido).
Calculando se tiene que: bajar 0.5 si hay un error garrafal de cálculo,
bajar 0.3 si hay un error menor de cálculo

$$\begin{aligned} T(\alpha u + v) \\ &= (\alpha(u_1 + u_4) + (v_1 + v_4)) + (\alpha(u_2 + u_3) + (v_2 + v_3))x + (\alpha(u_1 + u_2 + 2u_3 + u_4) + (v_1 + v_2 + 2v_3 + v_4))x^2 \\ &= \alpha[(u_1 + u_4) + (u_2 + u_3)x + (u_1 + u_2 + 2u_3 + u_4)x^2] + [(v_1 + v_4) + (v_2 + v_3)x + (v_1 + v_2 + 2v_3 + v_4)x^2] \\ &= \alpha T(u) + T(v) \end{aligned}$$

b) (2 ptos.) Calcular la matriz representante de T con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}_2[x]$ respectivamente.

Respuesta: Si denotamos $e_1, ..., e_4$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ se tiene que (esto vale 1 pto.):

$$\begin{aligned} T(e_1) &= 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 \\ T(e_2) &= 0 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 \\ T(e_3) &= 0 + 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 \\ T(e_4) &= 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 \end{aligned}$$

Entonces, se deduce directamente que la matriz solicitada es (esto tiene 1 pto):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c) (2 ptos.) Calcular la matriz representante de T con respecto a las bases

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \mathcal{B}_2 = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$$

respectivamente, usando matrices de cambio de base y la matriz encontrada en b).

Respuesta: Si Q es la matriz de pasaje de $\mathcal{B}_1$ a la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y P es la matriz de pasaje de la base canónica de polinomios a $\mathcal{B}_2$ se tiene que la matriz solicitada es $B = P \cdot A \cdot Q$ (0.5 ptos. si saben que deben calcular). La matriz Q es directa pues lleva a una base canónica y es (0.5 ptos.):

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar P requiere expresar la base canónica como combinación lineal de la base de llegada (resolviendo sistema lineal que omito; otros 0.5 ptos.):

$$\begin{aligned} 1 &= \tfrac{1}{2}(1+x) - \tfrac{1}{2}(x+x^2) + \tfrac{1}{2}(1+x^2) \\ x &= \tfrac{1}{2}(1+x) + \tfrac{1}{2}(x+x^2) - \tfrac{1}{2}(1+x^2) \\ x^2 &= -\tfrac{1}{2}(1+x) + \tfrac{1}{2}(x+x^2) + \tfrac{1}{2}(1+x^2) \end{aligned}$$

0.3 por resolver el sistema lineal

Luego,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

0.2 por concluir con el valor de P

También pueden calcular la matriz P calculando la matriz de cambio de base de la canónica a $\mathcal{B}_2$, calculando la de $\mathcal{B}_2$ a la canónica e invirtiendo esa matriz.
i.e.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

0.5 por forma alternativa de encontrar P

Multiplicando (0.5 ptos.) se tiene que:

$$B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

0.5 por hacer la multiplicación

P2. Sea $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ y $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $T_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Suponga que: $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y que el núcleo de T_A está generado por $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

a) (1.5 ptos.) Dar una base y la dimensión del núcleo de T_A.

Respuesta: Para dar una base del núcleo de T_A basta reducir el generador a una base. Es claro que los dos primeros vectores son linealmente independientes pues tienen un cero en coordenadas diferentes. El tercero se escribe como dos veces el primero menos dos veces el segundo, luego es dependiente. Esto prueba que $dim(Ker(T_A)) = 2$ y que los dos primeros generados son una base.

Pueden hacerlo más formal escalonando la matriz con los 3 vectores generadores y quedándose con los dos primeros.

Dar 0.75 ptos. por reducir base, otros 0.75 ptos. por dar bien dimensión.

b) (1.5 ptos.) Dar una base y la dimensión de $Im(T_A)$.

Respuesta: Por el teorema del núcleo imagen se tiene que $dim(Im(T_A)) = 3 - dim(Ker(T_A)) = 3 - 2 = 1$ (esto ya permite tener 0.5 ptos.). Para calcular una base basta observar/probar que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ que se formó extendiendo una base del núcleo de T_A por $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Luego $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una base de la imagen (1 pto.).

Una forma alternativa de abordar esta parte es señalar que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ está en la imagen de T_A, y que como esta última tiene dimensión 1, el referido vector genera y es base de $Im(T_A)$. **la forma alternativa tiene 1.0 punto** *c*) (1.5 ptos.) Indique si T_A es inyectiva y si es sobreyectiva, justifique su respuesta.

Respuesta: La transformación T_A no es inyectiva ni sobreyectiva pues tiene núcleo no trivial (distinto de $\{0\}$ ya que $dim(Ker(T_A)) = 1$) y la dimensión de la imagen es menor que 2 (0.75 ptos. por cada concepto correcto).

d) (1.5 ptos.) Encuentre explícitamente la matriz A.

Respuesta: Hay que encontrar las coordenadas de un elemento arbitrario de $\mathbb{R}^3$ en la base: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Resolviendo un sistema lineal se encuentra que (1 pto.):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (y-2x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (z-y+2x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

0.2 por plantear sistema
0.5 por resolver el sistema
0.3 por concluir

Luego (0.5 ptos.),

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (z-y+2x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De donde se deduce que,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

0.5 puntos

1.5 por forma alternativa

Otra forma de enfrentar esta parte es resolver el siguiente sistema de 6 ecuaciones en las incógnitas a, b, c, d, e, f donde $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$:

0.3 por plantear sistema
1.0 por resolver
0.2 por concluir

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

P3. *a*) (3 ptos.) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que verifica que $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $T\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pruebe que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$ en todo $x, y \in \mathbb{R}$. (Indicación: pruebe que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y calcule las coordinadas de cualquier punto de $\mathbb{R}^2$ en esta base.)

Respuesta: Como $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ (0.5 ptos. por probar esto), se tiene que,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{y-x}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

0.5 por plantear esto

Luego

1.0 por plantear esta igualdad

0.5 por plantear esta igualdad

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{x+y}{2} T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \frac{y-x}{2} T\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

0.5 por concluir

Desarrollo alternativo próxima hoja

b) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$.

1) (1 pto.) Pruebe que $Ker(T) \cap Im(T) = \{0\}$ (Obs.: $Ker(T)$ es el núcleo de T).

Respuesta: Sea $x \in Ker(T) \cap Im(T)$. Luego, $x = T(y)$ para un cierto $y \in \mathbb{R}^n$, y $T(x) = 0$. Pero por hipótesis $x = T(y) = T(T(y)) = T(x) = 0$, luego $x = 0$. Luego, $Ker(T) \cap Im(T) \subseteq \{0\}$. La inclusión reversa siempre se tiene (porque $Ker(T)$ e $Im(T)$ son espacios vectoriales).

0.8 por esta inclusión

0.2 por inclusión restante

2) (1 pto.) Pruebe que $dim(Ker(T) + Im(T)) = n$.

Respuesta: Sabemos que $dim(Ker(T) + Im(T)) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T))$ pues estos s.e.v. se suman directamente por punto anterior (0.5 pto. por esto). Además, por TNI se tiene que esta última suma es igual a n (0.5 pto. por aplicación de TNI).

3) (1 pto.) Concluir, usando argumentos de dimensionalidad, que $\mathbb{R}^n = Ker(T) \oplus Im(T)$.

Respuesta: Como la dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n y $Ker(T)+Im(T) \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces se concluye (por resultado visto) que $Ker(T) + Im(T) = \mathbb{R}^n$ (0.5 pto. por usar argumento de dimensionalidad). Esto junto con la parte b.1) y la caracterización de suma directa implican que $Ker(T) \oplus Im(T) = \mathbb{R}^n$ (0.5 pto. por concluir adecuadamente).

Duración: 3h.

Desarrollo opcional P3 a) usando bases canónicas

1) ∘ $x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x+y\end{pmatrix}$ +0.5

2) ∘ sabemos que $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \wedge -T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ (*) +1.0

$\Rightarrow T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ → se obtiene sumando (*) +0.5

$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ → se obtiene restando (*) +0.5

3) $\Rightarrow T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x+y\end{pmatrix}$ → juntando 1) ∧ 2) +0.5 por concluir