Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal MA1102-2023-1

Control 1

P1. Considere el siguiente sistema lineal de ecuaciones reales donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0, \\ x_1 & + & (a-1)x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ & & ax_2 & + & & & (a+1)x_4 & = & a+1, \\ -x_1 & + & (a+1)x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0. \end{array}$$

(a) (4.0 pts) Determine para que valores de $a \in \mathbb{R}$ el sistema:

i) Tiene solución única.

ii) No tiene solución.

iii) Tiene infinitas soluciones.

Solución: Partimos construyendo la matriz aumentada asociada al sistema lineal y luego escalonamos:

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a+1 & a+1 \\ -1 & a+1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

Restándole la fila 1 a la fila 2 y sumándole la fila 1 a la 4, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a+1 & a+1 \\ 0 & a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

Si ahora le restamos la fila 2 a las filas 3 y 4, queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

(Descontar -0.4 pts por c/error aritmético en el escalonamiento, hasta máx 3 errores)

Si $a \neq 0$, entonces la matriz resultante está escalonada y en este caso ($a \neq 0$) observamos que:

- x_3 o x_1 es variable libre (no hay pivote en la columna 3 de la matriz escalonada). Luego, el sistema o no tiene solución o tiene infinitas soluciones, es decir, si $a \neq 0$, entonces no hay solución única. **(0.3 pts por decir que hay variables libres y 0.3 por la implicancia en términos de existencia de solución única)**.
  Esto lo pueden argumentar indicando que hay una fila de ceros en la matriz escalonada.
- el sistema no tiene solución si $a - 1 = 0$ y $a + 1 \neq 0$, es decir, cuando $a = 1$ no hay solución. **(0.6 pts)**
- si, además de $a \neq 0$, se tiene que $a \neq 1$, el sistema tiene solución y como hay variables libres, existen infinitas soluciones. **(0.6 pts)**

Ahora consideremos el caso $a = 0$ **(0.5 pts por identificar, explícita o implícitamente, este caso especial)**. Reemplazando en la última matriz y escalonando (específicamente, multiplicando la fila 2 por 1/2 y sumándosela a la fila 3), sigue que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz obtenida está escalonada y representa un sistema que no tiene solución **(0.5 pts por escalonar y concluir) en el caso** $a = 0$.

En resumen, el sistema:

- Nunca tiene solución única.
- No tiene solución si $a = 0$ o $a = 1$.
- Tiene infinitas soluciones si $a \notin \{0, 1\}$.

Indicaciones corrección.

- Errores de cálculo en algún paso no invalidan el resto del desarrollo del ejercicio.

(b) (2.0 pts) Fije $a = 2$ y encuentre todas las soluciones del sistema lineal.

Solución: Reemplazando por $a = 2$ en la 1era matriz escalonada de la parte anterior, tenemos que el sistema lineal original es equivalente al sistema lineal con matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sigue que $x_4 = 3$, $2x_2 + 2x_4 = 0$ por lo que $x_2 = -3$, y $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ por lo que $x_1 = -3 - x_3$. **(1.0 pts por expresar las variables en términos de las variables libres)** Luego, cualquiera que sea x_3 la siguiente es solución del sistema lineal original:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - x_3 \\ -3 \\ x_3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(\textbf{1.0 pts por llegar a la sol. general})}$$

Indicaciones corrección.

- Errores de cálculo en algún paso no invalidan el resto del desarrollo del ejercicio.
- Si reemplazan $a = 2$ en el sistema original y escalonan, eso no tiene puntaje.
- También pueden expresar la solución general como $(-3 \ \ -3 \ \ 0 \ \ 3)^T + \langle \{(-1 \ 0 \ 0 \ 1)^T\} \rangle$. Asignar puntaje completo si lo escriben así.

P2. (a) (2.0 pts) Sea $\{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto linealmente independiente de vectores. Determine para que valores de $a \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{v_1 + v_2, v_1 - av_2\}$ es linealmente independiente.

Solución:

1era forma: Observar que para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, **(0.5 pts por usar definición de independencia lineal)**

$$\begin{aligned} \alpha(v_1 + v_2) + \beta(v_1 - av_2) = 0 &\iff (\alpha + \beta)v_1 + (\alpha - a\beta)v_2 = 0 && \text{(reagrupando)} \\ &\iff \alpha + \beta = 0 \ \wedge \ \alpha - a\beta = 0 && \text{(porque } \{v_1, v_2\} \text{ es l.i.)} \\ &\iff \beta = -\alpha \ \wedge \ (1 + a)\alpha = 0. && \text{(despejando)} \end{aligned}$$

(0.5 pts por despejar los escalares α y β)

El último sistema lineal en α y β tiene solución única $\alpha = \beta = 0$ ssi $a \neq -1$ **(0.5 pts)**. Se concluye que $\{v_1 + v_2, v_1 - av_2\}$ es l.i. ssi $a \neq -1$ **(0.5 pts por concluir)**.

2da forma: Por resultado visto, $\{v_1 + v_2, v_1 - av_2\}$ es l.i. si $v_1 - av_2 \notin \langle\{v_1 + v_2\}\rangle$ **(0.5 pts por recordar/usar enunciado)**, es decir, si no existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v_1 - av_2 = \alpha(v_1 + v_2)$ **(0.5 pts)**. Equivalentemente, tal que $(1-\alpha)v_1 + (\alpha - a)v_2 = 0$, o equivalentemente, si $\alpha = a = 1$ (porque $\{v_1, v_2\}$ son l.i.) **(0.5 pts)**. Luego, el conjunto indicado es l.i. ssi $a \neq 1$ **(0.5 pts por concluir)**.

(b) (2.0 pts) Sean A, $I + A$ y $I + A^{-1}$ matrices invertibles. Pruebe que $(I + A^{-1})^{-1} = A(I + A)^{-1}$.

Solución: Para probar que la inversa de $I + A^{-1}$ es $A(I + A)^{-1}$, basta comprobar que **(0.8 pts por decir explícita o implícitamente que hay que verificar)**

$$(I + A^{-1}) \cdot A(I + A)^{-1} = I \quad \vee \quad A(I + A)^{-1} \cdot (I + A^{-1}) = I.$$

Verifiquemos la primera igualdad. En efecto, **(0.4 pts por cada una de las siguientes igualdades)**

$$\begin{aligned} (I + A^{-1}) \cdot A(I + A)^{-1} &= (A + A^{-1}A)(I + A)^{-1} && \text{(por asoc. de $\cdot$ y distrib. de $\cdot$ c/r a $+$)} \\ &= (I + A)(I + A)^{-1} && \text{(por def. de inversa y conmut. de $+$)} \\ &= I. && \text{(por def. de inversa)} \end{aligned}$$

(c) (2.0 pts) Sean S y T subespacios vectoriales de un espacio vectorial V. Probar que

$$S \cup T \text{ es subespacio vectorial de } V \iff S \subseteq T \text{ o } T \subseteq S.$$

Indicación: Pruebe que para $s \in S$ y $t \in T$, se tiene que si $s + t \in S \cup T$, entonces $t \in S$ o $s \in T$.

Solución:
($\Longleftarrow$) Si $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$ se tiene que $S \cup T = T$ o $S \cup T = S$. En cualquiera de los casos $S \cup T$ es s.e.v. porque S y T lo son **(0.5 pts)**.

($\Longrightarrow$)
1era forma: Por contradicción. Supongamos que $S \cup T$ es s.e.v, que $S \not\subseteq T$ y que $T \not\subseteq S$ **(0.5 pts por plantear el argumento por contradicción)**. Luego, existen $t \in T \setminus S$ y $s \in S \setminus T$. Como $t \in T$ y $s \in S$, sigue que $s, t \in S \cup T$. Como $S \cup T$ es s.e.v., deducimos que $s + t \in S \cup T$, es decir, $s + t \in S$ o $s + t \in T$ **(0.5 pts pts por identificar elementos en $T \setminus S$ y $S \setminus T$ y deducir que $s + t \in S \cup T$)**.

En el caso que $s + t \in S$, tendríamos que existe $s' \in S$ tal que $s + t = s'$. Equivalentemente, $t = s' - s$, y como $s, s' \in S$ con S s.e.v., concluimos que $t \in S$, lo que constituye una contradicción **(0.5 pts)**.

El caso $s + t \in T$ es análogo, pero ahora se llega a la contradicción $s \in T$.

2da forma: Si $T \subseteq S$, estamos listos **(0.5 pts por separar el argumento en los casos $T \subseteq S$ y $S \subseteq T$)**. Si $T \not\subseteq S$, entonces existe $t \in T \setminus S$. Veamos que $S \subseteq T$. Consideremos $s \in S$. Como $s, t \in S \cup T$, por hipótesis, $s + t \in S \cup T$ **(0.5 pts por identificar un elemento en $T \setminus S$ y deducir que $s + t \in S \cup T$)**. Si $s + t \in S$, sigue que $t \in S$, contradicción. Luego, $s + t \in T$, de donde sigue que $s \in T$. En resumen, $S \subseteq T$ **(0.5 pts)**.

P3. Sean $A \in M_{1,2}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{2,1}(\mathbb{R})$. Considere el subconjunto de las matrices reales de dos filas y dos columnas,

$$U = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid AMB = 0 \right\}.$$

(a) (2.0 pts) Pruebe que cualquiera sean $A \in M_{1,2}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ se tiene que U es subespacio vectorial de $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

Solución: Aplicamos un criterio de s.e.v. Primero claramente la matriz nula está en U pues $AOB = 0$ (donde la primera 0 es matriz nula). Ahora, sean $M, M' \in U$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Debemos verificar que $M+\lambda M' \in U$ **(0.5 pts por invocar el criterio o usar definición de s.e.v.)**. En efecto, como $M, M' \in U$, se tiene que $AMB = AM'B = 0$ **(0.5 pts)**. Luego, por distributividad del $\cdot$ c/r a $+$ en $M_{2,2}(\mathbb{R})$,

$$A(M+\lambda M')B = AMB + \lambda AM'B = 0, \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

es decir, $M + \lambda M' \in U$ **(0.5 pts por concluir)**.

Suponiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) (2.0 pts) Encuentre una base de U y de su dimensión.

Solución: Primero determinaremos un generador de U. Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Observar que $AMB = a+b-c-d$. Luego,

$$M \in U \iff a+b-c-d = 0 \iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b-c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(0.6 pts)

Equivalentemente, $U = \langle \mathcal{B} \rangle$ donde

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \textbf{(0.6 pts por identificar el generador)}$$

Afirmamos que $\mathcal{B}$ es base de U. Claramente, $\mathcal{B}$ genera. Verifiquemos que es l.i. En efecto, para $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a = b = c = 0.$$

(0.8 pts por demostrar independencia lineal)

Sigue que $\mathcal{B}$ es l.i. y, por lo tanto, base de U.

Indicaciones corrección.

- Errores de cálculo en algún paso no invalidan el resto del desarrollo del ejercicio.

(c) (2.0 pts) Indique para cuál(es) de los siguientes subespacios vectoriales Z_i de $M_{2,2}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, se cumple que $U \oplus Z_i = M_{2,2}(\mathbb{R})$. Justifique su respuesta en ambos casos.

$$Z_1 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \qquad \text{y} \qquad Z_2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Solución:

Veamos el caso de Z_1.

- *1era forma:* Si $U \oplus Z_1 = M_{2,2}(\mathbb{R})$, entonces $\dim(U) + \dim(Z_1) = \dim(M_{2,2}(\mathbb{R}))$. Sabemos que $\dim(M_{2,2}(\mathbb{R})) = 4$ y por la parte (b) anterior, sabemos que $\dim(U) = 3$. Luego, para que $U \oplus Z_1 = M_{2,2}(\mathbb{R})$ se debe tener que $\dim(Z_1) = 1$. Claramente, Z_1 no cumple esta condición, ya que los elementos que lo generan son l.i. **(0.5 pts por invocar argumentos de dimensionalidad y 0.5 pts por aplicarlos correctamente)**
- *2da forma:* Por caracterización de suma directa, sabemos que $U \oplus Z_1 = M_{2,2}(\mathbb{R})$ ssi $U \cap Z_1 = \{0\}$ y $Z_1 + U = M_{2,2}(\mathbb{R})$ **(0.4 pts por dar caracterización)**. Veamos que $U \cap Z_1 \neq \{0\}$, luego $M_{2,2}(\mathbb{R})$

no es suma directa de Z_1 y U. En efecto, notar que $Z \in Z_1$ ssi $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$Z = \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

(**0.3 pts por describir elementos de** $Z_1 \cap U$)

Como $Z \in U$ ssi $AZB = 0$, sigue que para que Z esté en U se debe cumplir que $0 = \alpha - \beta$, es decir, que $\alpha = \beta$. Por ejemplo, si $\alpha = \beta = 1$, sigue que

$$Z = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in Z_1 \cap U.$$

(**0.3 pts por encontrar** $Z \in Z_1 \cap U$**,** $Z \neq 0$)

Estudiemos ahora el caso de Z_2. Por caracterización de suma directa, $Z_2 \oplus U = M_{2,2}(\mathbb{R})$ ssi $Z_2 \cap U = \{0\}$ y $Z_2 + U = M_{2,2}(\mathbb{R})$ (**0.4 pts por caracterización**).

Primero, calculemos $Z_2 \cap U$. Para ello, notar que

$$M \in Z_2 \cap U \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in U \iff 0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\alpha.$$

Sigue que $M \in Z_2 \cap U$ ssi $M = 0$, es decir $M \cap Z_2 = \{0\}$ (**0.3 pts por determinar** $Z_2 \cap U$).

Determinemos ahora $Z_2 + U$ (**0.3 pts por cualquiera de los argumentos que siguen**).

- *1era forma (por argumento de dimensionalidad):* Por resultado visto,

$$\dim(Z_2 + U) = \dim(Z_2) + \dim(U) - \dim(Z_2 \cap U).$$

  Dado que $\dim(Z_2 \cap U) = 0$ (porque $Z_2 \cap U = \{0\}$) y que $\dim(Z_2) = 1$ (porque Z_2 está generado por un elemento no nulo), sigue que $\dim(Z_2 + U) = 4$. Como $Z_2, U \subseteq M_{2,2}(\mathbb{R})$, tenemos que $Z_2 + U \subseteq M_{2,2}(\mathbb{R})$. Es decir, $Z_2 + U$ es de dimensión 4 y está contenido en $M_{2,2}(\mathbb{R})$ que también es de dimensión 4. Por resultado visto, sigue que $Z_2 + U = M_{2,2}(\mathbb{R})$.
- *2da forma (por definición de suma de s.e.v.):* Como $Z_2, U \subseteq M_{2,2}(\mathbb{R})$, sigue que $Z_2 + U \subseteq M_{2,2}(\mathbb{R})$. Verifiquemos que también se cumple la otra inclusión. Para ello, basta verificar que cualquiera sea $N \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ existen $Z \in Z_2$ y $M \in U$ tales que $N = Z + M$. Notar que $Z \in Z_2$ y $M \in U$ ssi $\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tales que

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha+\beta-\gamma \end{pmatrix}.$$

  Luego, la condición $N = Z + M$ equivale a pedir que $\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha+\beta-\gamma \end{pmatrix}.$$

  Basta tomar, $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$, y $\delta = d - (\alpha + \beta - \gamma) = d - a - b + c$.
- *3era forma:* (Idea) Basta expresar una matriz arbitraria $N \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ como combinación lineal de la base de U encontrada en la parte (b) y una base de Z_2 (por ejemplo, la base que consiste del único generador de Z_2).

En resumen, $M_{2,2}(\mathbb{R}) = Z_2 \oplus U$.

Indicaciones corrección.

- Para argumentar que $Z_1 \cap U \neq \{0\}$ basta exhibir un $Z \neq 0$ que esté en $Z_1 \cap U$. No es necesario explicar cómo encontraron dicho Z.