Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal MA1102-2023-1

Control 1

P1. Considere el siguiente sistema lineal de ecuaciones reales donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0, \\ x_1 & + & (a-1)x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ & & ax_2 & + & & & (a+1)x_4 & = & a+1, \\ -x_1 & + & (a+1)x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0. \end{array}$$

(a) (4.0 pts) Determine para que valores de $a \in \mathbb{R}$ el sistema:

i) Tiene solución única.

ii) No tiene solución.

iii) Tiene infinitas soluciones.

(b) (2.0 pts) Fije $a = 2$ y encuentre todas las soluciones del sistema lineal.

P2. (a) (2.0 pts) Sea $\{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto linealmente independiente de vectores. Determine para que valores de $a \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{v_1 + v_2, v_1 - av_2\}$ es linealmente independiente.

(b) (2.0 pts) Sean A, $I + A$ y $I + A^{-1}$ matrices invertibles. Pruebe que $(I + A^{-1})^{-1} = A(I + A)^{-1}$.

(c) (2.0 pts) Sean S y T subespacios vectoriales de un espacio vectorial V. Probar que

$$S \cup T \text{ es subespacio vectorial de } V \iff S \subseteq T \text{ o } T \subseteq S.$$

Indicación: Pruebe que para $s \in S$ y $t \in T$, se tiene que si $s + t \in S \cup T$, entonces $t \in S$ o $s \in T$.

P3. Sean $A \in M_{1,2}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{2,1}(\mathbb{R})$. Considere el subconjunto de las matrices reales de dos filas y dos columnas,

$$U = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid AMB = 0 \right\}.$$

(a) (2.0 pts) Pruebe que cualquiera sean $A \in M_{1,2}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ se tiene que U es subespacio vectorial de $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

Suponiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) (2.0 pts) Encuentre una base de U y de su dimensión.

(c) (2.0 pts) Indique para cuál(es) de los siguientes subespacios vectoriales Z_i de $M_{2,2}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, se cumple que $U \oplus Z_i = M_{2,2}(\mathbb{R})$. Justifique su respuesta en ambos casos.

$$Z_1 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \quad \text{y} \quad Z_2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Duración: 3 horas.