

CONTROL 2 ALGEBRA LINEAL

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

P1)

(1.1) (1.5 ptos.) Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una transformación lineal. Pruebe que existe un único $a \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad T(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$$

(1.2) (1.5 ptos.) Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$. Pruebe que

$$\mathbb{R}^n = N(T) \oplus \text{Im}(T)$$

(1.3) Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que:

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ y/2 \\ z/3 \end{bmatrix}.$$

Considere las bases de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^4 respectivamente:

$$B_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ y } B_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

a) (1.5 ptos.) Encontrar la matriz representante de T partiendo en la base B_3 y llegando a la base B_4 .

b) (1.5 ptos.) Determinar bases y dimensión de $N(T)$ e $\text{Im}(T)$. Determine si T es inyectiva y/o sobreyectiva.

P2)

2.1) (2 ptos.) Sea $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica tal que

$$N(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio asociado al valor propio 2. Determine A .

2.2) Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) (1 pto.) Calcular los valores propios de A . ¿Es A una matriz invertible?
- b) (1 pto.) Calcular una base de vectores propios de A .
- c) (1 pto.) Encontrar matrices $P, D \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ con D diagonal, tal que, $A = PDP^{-1}$.
- d) (1 pto.) Calcular A^n para $n \in \mathbb{N}$.

Tiempo: 2 horas