Pauta C2 Algebra Lineal
Prof: Alejandro MAASS

P1)

1.1) Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.l. y φ_n base canónica de $\mathbb{R}^n$
φ_1 " " de $\mathbb{R}$.

Sabemos que $T(\vec{x}) = M_{\varphi_1 \varphi_n}(T) \cdot \vec{x}$, donde

$A = M_{\varphi_1 \varphi_n}(T)$ es la matriz representante de T partiendo en φ_n y llegando a φ_1. La matriz A tiene dimensión $1 \times n$; llamando $a \in \mathbb{R}^n$ a A^T se tiene que:

$$T(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

La unicidad de A o a viene de la unicidad de las matrices representantes.

2) Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $T \circ T = T$.

a) Probemos que $N(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{0\}$. Basta probar $\subseteq$.
Sea $\vec{x} \in N(T) \cap \operatorname{Im}(T)$, luego $T(\vec{x}) = 0$ y $\exists\, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que $T(\vec{y}) = \vec{x}$.
De aquí, $T \circ T(\vec{y}) = T(\vec{x}) = 0$. Es decir, $T(\vec{y}) \in N$
Eso es, $T(\vec{y}) = 0$. Hemos probado que $\vec{x} = 0$ y $N(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$ se suman de manera directa.

b) luego $\dim(N(T) \oplus \operatorname{Im}(T)) = \dim(N(T)) + \dim \operatorname{Im}(T)$
$= \dim(\mathbb{R}^n) = n$

fórmula clases

Teorema Núcleo Imagen

$\Rightarrow$ $\boxed{N(T) \oplus \operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}^n}$ pues $\operatorname{Im}(T) \oplus N(T)$ es un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ de la misma dimensión

1.3) Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y/2 \\ z/3 \end{pmatrix}$$

β_3 = base canónica $\mathbb{R}^3$

$$\beta_4 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_4} \right\}$$

a) <u>Cálculo</u> $\underline{M_{\beta_4 \beta_3}(T)}$:

Calculamos T de base canónica en $\mathbb{R}^3$ y debemos buscar coordenadas en

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + \delta u_4$$

$$T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + \delta u_4$$

$$T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + \delta u_4.$$

Para calcular los $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ resolvemos 3 S.L en paralelo:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$$

"es muy simple así que no vale la pena escalonar"

<u>1er S.L</u>: $\delta = 0, \gamma = 0, \beta = 0, \alpha = 1/2$

<u>2do S.L</u>: $\delta = 0, \gamma = -1/2, \beta = 0, \alpha = 0$

<u>3er S.L</u>: $\delta = 1/3, \gamma = 0, \beta = -1/2, \alpha = 1/4$

$$\Rightarrow M_{\beta_4 \beta_3}(T) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

b) $\underline{N(T)}$: es muy simple ver que

$$T(\vec{X}) = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y/2 \\ z/3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0. \end{array}$$

0.75

$\Rightarrow$ T es inyectiva y $N(T) = \{0\}$.

$\underline{Im(T)}$: del Teorema de núcleo-imagen
$\dim(Im(T)) = 3 - \dim(N(T)) = 3$, luego
T no es sobreyectiva.

0.25

- cualquier elemento de $Im(T)$ tiene 3 coordenadas independientes y se escribe:

$$x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

luego $Im(T) = \langle \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{base.}} \rangle$

— · —

P2)

2.1) Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ que verifica:

$$N(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \text{ y } A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:
$$\begin{aligned} -a + b &= 0 \\ -b + c &= 0 \\ a + b &= 2 \\ b + c &= 2 \end{aligned}$$

Resolviendo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{aligned} c &= 1 \\ b &= 1 \\ a &= 1 \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2) Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

a) <u>v.p.'s de A</u>: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \left| \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right| = (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] - \left[(2-\lambda)+1\right] + \left[-1-(2-\lambda)\right]$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - (3-\lambda) + (\lambda - 3)$$
$$= (3-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda) - 2\right] = (3-\lambda)\left[\lambda^2 - 3\lambda\right] = (-1)(\lambda-3)^2\lambda$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 0 \quad \text{v.p.s}}$ 0.75

$\Rightarrow$ No es invertible pues $\lambda_2 = 0$ es v.p. 0.25

b) Vectores propios:

W_1: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $y, z \in \mathbb{R}$, $x = y + z$ 0.5

$\Rightarrow W_3 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

W_0: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $z \in \mathbb{R}$, $y = z$, $x = -z$ 0.5

$\Rightarrow W_0 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

c) Entonces, $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{= P} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ 1.0

con $P = P_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ //

d) Debemos calcular P^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -3 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

0'5 pts

$$A^n = P D^n P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 3^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

0'5 ptos

$$= 3^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3^{n-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$