Pauta de corrección Control 2

P1. a) **(3,0 pts.)** Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$. Muestre que el desarrollo de Taylor de orden 5 en torno a $\bar{x} = 0$ de f es igual a

$$T_f^5(x) = x^2 - \frac{x^4}{3}.$$

Indicación: Recuerde que $2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) = \operatorname{sen}(2\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Solución

Recordemos que el polinomio de Taylor de orden 5 en torno a $\bar{x} = 0$, está dado por

$$T_f^5(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5. \tag{1}$$

(0,5 pts. por escribir la definición del polinomio de Taylor)

Primero notamos que $f(0) = \operatorname{sen}^2(0) = 0$. **(0,2 pts. por escrbir esta igualdad)**

Calculemos ahora las derivadas sucesivas de f en $\bar{x} = 0$. Comenzamos con la primera derivada:

$$f'(x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = \operatorname{sen}(2x) \implies f'(0) = \operatorname{sen}(0) = 0.$$ **(0,4 pts. por calcular la primera derivada)**

Seguimos con la segunda derivada:

$$f''(x) = (\operatorname{sen}(2x))' = 2\cos(2x) \implies f''(0) = 2\cos(0) = 2,$$ **(0,4 pts. por calcular la segunda derivada)**

la tercera derivada,

$$f^{[3]}(x) = (2\cos(2x))' = -4\operatorname{sen}(2x) \implies f^{(3)}(0) = -4\operatorname{sen}(0) = 0,$$

(0,4 pts. por calcular la tercera derivada)

la cuarta derivada,

$$f^{[4]}(x) = (-4\operatorname{sen}(2x))' = -8\cos(2x) \implies f^{(4)}(0) = -8\cos(0) = -8$$

(0,4 pts. por calcular la cuarta derivada)

y, por último, la quinta derivada

$$f^{[5]}(x) = (-8\cos(2x))' = 16\operatorname{sen}(2x) \implies f^{(5)}(0) = 16\operatorname{sen}(0) = 0.$$

(0,4 pts. por calcular la quinta derivada)

Reemplazando estos valores en (1), obtenemos

$$T_f^5(x) = x^2 - \frac{x^4}{3}.$$ **(0,3 pts. por reemplazar y obtener T_f^5)**

Alternativa

También es posible tomar $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ y, como se vio en clases y está en el apunte, usar directamente que:

$$T_g^5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Luego, se puede elevar esto al cuadrado y descartar todos los términos que tengan una potencia de x más grande que 5, obteniendo la misma respuesta.

b) **(3,0 pts.)** Usando la fórmula de Taylor y la parte anterior, demuestre que

$$\left|\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{11}{48}\right| \leq \frac{1}{1440}.$$

Solución

Por la fórmula de Taylor, para todo $x > 0$ existe $\xi \in (0, x)$ tal que:

$$f(x) = T_f^k(x) + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} x^{k+1}.$$ **(0,3 pts. por enunciar la fórmula de Taylor)**

Evaluando en $x = \frac{1}{2}$ y $k = 5$, obtenemos:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = T_f^5\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f^{[6]}(\xi)}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6. \tag{2}$$

(0,3 pts. por usar la fórmula de Taylor)

Por otro lado, evaluando T_f^5 en $x = \frac{1}{2}$ resulta:

$$T_f^5\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{48} = \frac{11}{48}.$$ **(0,3 pts. por calcular $T_f^5(1/2)$)**

Además, la sexta derivada de f es:

$$f^{[6]}(x) = (16\,\mathrm{sen}(2x))' = 32\cos(2x).$$ **(0,4 pts. por calcular la sexta derivada)**

Reemplazando en (2), obtenemos:

$$\mathrm{sen}^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{48} + \frac{32\cos(2\xi)}{720 \cdot 64} = \frac{11}{48} + \frac{\cos(2\xi)}{1440}.$$ **(0,5 pts. por llegar a esta igualdad)**

Así,

$$\left|\mathrm{sen}^2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{11}{48}\right| = \left|\frac{\cos(2\xi)}{1440}\right|$$ **(0,5 pts. por llegar a esta igualdad)**

$$\leq \frac{1}{1440},$$ **(0,4 pts. por acotar correctamente)**

ya que $|\cos(2\xi)| \leq 1|$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$. **(0,3 pts. por justificar la cota)**

P2. Calcule las siguientes primitivas:

a) **(3,0 pts.)** $\displaystyle\int e^x \,\mathrm{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x.$

Solución

Usamos integración por partes con

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{sen}^2(x), & \mathrm{d}u &= 2\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{sen}(2x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= e^x\,\mathrm{d}x, & v &= e^x. \end{aligned}$$

(0,4 pts. por plantear la integración por partes)

Obtenemos

$$\int e^x \,\mathrm{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x = e^x\,\mathrm{sen}^2(x) - \int e^x\,\mathrm{sen}(2x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

(0,4 pts. por hacer la integración por partes)

Calcularemos ahora la primitiva

$$\int e^x\,\mathrm{sen}(2x)\,\mathrm{d}x$$

usando integración por partes dos veces. Comenzamos con

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{sen}(2x), & \mathrm{d}u &= 2\cos(2x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= e^x\,\mathrm{d}x, & v &= e^x. \end{aligned}$$

(0,4 pts. por plantear la integración por partes)

Resulta

$$\int e^x \operatorname{sen}(2x)\,\mathrm{d}x = e^x \operatorname{sen}(2x) - \int e^x \cdot 2\cos(2x)\,\mathrm{d}x = e^x \operatorname{sen}(2x) - 2\int e^x \cos(2x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

(0,4 pts. por hacer la integración por partes)

Para calcular la última primitiva, integramos por partes nuevamente con

$$\begin{aligned} u &= \cos(2x), & \mathrm{d}u &= -2\operatorname{sen}(2x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= e^x\,\mathrm{d}x, & v &= e^x. \end{aligned}$$

(0,4 pts. por plantear la integración por partes)

Así,

$$\int e^x \cos(2x)\,\mathrm{d}x = e^x \cos(2x) - \int e^x \cdot (-2\operatorname{sen}(2x))\,\mathrm{d}x = e^x \cos(2x) + 2\int e^x \operatorname{sen}(2x)\,\mathrm{d}x.$$

(0,4 pts. por hacer la integración por partes)

Reemplazando en (4), tenemos que

$$\int e^x \operatorname{sen}(2x)\,\mathrm{d}x = e^x \operatorname{sen}(2x) - 2\int e^x \cos(2x)\,\mathrm{d}x = e^x \operatorname{sen}(2x) - 2\left(e^x \cos(2x) + 2\int e^x \operatorname{sen}(2x)\,\mathrm{d}x\right),$$

y, por lo tanto,

$$\int e^x \operatorname{sen}(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^x \operatorname{sen}(2x) - 2e^x \cos(2x)}{5}$$ **(0,3 pts. por encontrar esta primitiva)**

Finalmente, reemplazando en (3), llegamos a

$$\int e^x \operatorname{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x = e^x \operatorname{sen}^2(x) - \frac{e^x \operatorname{sen}(2x) - 2e^x \cos(2x)}{5} + C.$$

(0,3 pts. por reemplazar y llegar al resultado final)

b) **(3,0 pts.)** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)+1}{\cos(x)+1}\,\mathrm{d}x.$

Solución

Usamos el cambio de variable de Weierstrass $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, con el que se tiene

$$\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad \operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

(0,5 pts. por plantear el cambio de variable)

De este modo, la integral queda

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sen}(x)+1}{\cos(x)+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}+1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+1} \cdot \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{2\left(\frac{2t}{1+t^2}+1\right)}{1-t^2+1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{2\left(\frac{2t}{1+t^2}+1\right)}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \left(\frac{2t}{1+t^2}+1\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

(0,5 pts. por hacer el cambio de variable)

(0,5 pts. por simplificar)

Como además

$$\int \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln(1+t^2) + C \qquad \text{y} \qquad \int \mathrm{d}t = t + C,$$ **(0,5 pts. por enunciar estas primitivas)**

obtenemos que

$$\int \left(\frac{2t}{1+t^2}+1\right) \mathrm{d}t = \ln(1+t^2)+t+C. \qquad \textbf{(0,5 pts. por calcular esta primitiva)}$$

Volviendo a la variable original, queda

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)+1}{\cos(x)+1} \mathrm{d}x = \ln\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)+\tan\left(\frac{x}{2}\right)+C. \qquad \textbf{(0,5 pts. por volver a la variable original)}$$

P3. a) **(3,0 pts.)** Justifique que la función $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$$

es integrable en el intervalo $[n, 2n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{2n} f = 0$.

Solución

Notemos que f es decreciente, por lo que es integrable en $[n, 2n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(0,5 pts. por justificar que f es integrable)

Alternativa

También se puede justificar que f es integrable en $[n, 2n]$ argumentando que es continua en ese intervalo.

En particular, f está acotada superiormente por $f(n)$ en el intervalo $[n, 2n]$.

(0,5 pts. por enunciar esta cota)

Así, por la monotonía de la integral:

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_n^{2n} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \mathrm{d}x &\leq \int_n^{2n} f(n) \, \mathrm{d}x && \textbf{(0,5 pts. por usar la monotonía de la integral)} \\ &= f(n)(2n-n) && \textbf{(0,5 pts. por calcular esta integral)} \\ &= \frac{n}{\sqrt{1+n^4}}. && \textbf{(0,5 pts. por llegar a este resultado)} \end{aligned}$$

Como la sucesión de la derecha tiende a 0 si $n \to \infty$, el teorema del sandwich muestra que

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{2n} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \mathrm{d}x = 0. \qquad \textbf{(0,5 pts. por usar el teorema del sandwich para concluir)}$$

Alternativa

Para obtener la misma cota, también se puede argumentar que $\int_n^{2n} f \leq S(f, P)$, donde $P = \{n, 2n\}$.

b) **(3,0 pts.)** Sea $A = \left\{ \frac{100}{k} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ y sea $f\colon [0, 100] \to [0, 1]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Considere la partición P de $[0, 100]$ dada por $P = \{0, 14, 21, 24, 27, 29, 31, 34, 39, 48, 51, 77, 97, 100\}$. Calcule la suma inferior $s(f, P)$ y la suma superior $S(f, P)$.

Solución

Escribimos los elementos de P como $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, con $n = 13$.

Primero, calculamos la suma inferior $s(f,P)$. Por definición:

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f) \cdot (x_i - x_{i-1}),$$ **(0,5 pts. por enunciar la definición de la suma inferior)**

donde $m_i(f) = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Como f solo toma los valores 0 y 1, $m_i(f)$ solo puede tomar estos valores. Veremos que $m_i(f) = 0$. En efecto, existe $x \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $f(x) = 0$, ya que f toma el valor 1 solo en los elementos de A, y en cualquiera de estos intervalos hay un elemento que no pertenece a A (por ejemplo, cualquier x irracional). **(0,5 pts. por justificar que $\boldsymbol{m_i(f) = 0}$)**
Concluimos que:

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0.$$ **(0,5 pts. por calcular $\boldsymbol{s(f,P)}$)**

Calcularemos ahora la suma superior $S(f,P)$. Por definición:

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f) \cdot (x_i - x_{i-1}),$$ **(0,5 pts. por enunciar la definición de la suma superior)**

donde $M_i(f) = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Nuevamente, como f solo toma los valores 0 y 1, $M_i(f)$ solo puede tomar estos valores. Vemos que $M_i(f) = 0$ si no hay ningún elemento de A en $[x_{i-1}, x_i]$, y que $M_i(f) = 1$ si lo hay.
Los intervalos que contienen elementos de A son: $[0,14]$ (contiene a $1 = \frac{100}{100}$), $[14,21]$ (contiene a $20 = \frac{100}{5}$), $[24,27]$ (contiene a $25 = \frac{100}{4}$), $[31,34]$ (contiene a $33{,}333\ldots = \frac{100}{3}$), $[48,51]$ (contiene a $50 = \frac{100}{2}$) y $[97,100]$ (conteniene a $100 = \frac{100}{1}$). **(0,5 pts. por encontrar los intervalos con $\boldsymbol{M_i(f) = 1}$)**
Concluimos que:

$$S(f,P) = 1(14-0) + 1(21-14) + 1(27-24) + 1(34-31) + 1(51-48) + 1(100-97) = 33.$$

(0,5 pts. por calcular $\boldsymbol{S(f,p)}$)