Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1002: Cálculo Diferencial e Integral. 2025-1

Control 2

P1. a) **(3,0 pts.)** Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$. Muestre que el desarrollo de Taylor de orden 5 en torno a $\bar{x} = 0$ de f es igual a

$$T_f^5(x) = x^2 - \frac{x^4}{3}.$$

Indicación: Recuerde que $2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) = \operatorname{sen}(2\theta)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

b) **(3,0 pts.)** Usando la fórmula de Taylor y la parte anterior, demuestre que

$$\left|\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{11}{48}\right| \leq \frac{1}{1440}.$$

P2. Calcule las siguientes primitivas:

a) **(3,0 pts.)** $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x.$

b) **(3,0 pts.)** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)+1}{\cos(x)+1}\,\mathrm{d}x.$

P3. a) **(3,0 pts.)** Justifique que la función $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$$

es integrable en el intervalo $[n, 2n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y demuestre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_n^{2n} f = 0.$

b) **(3,0 pts.)** Sea $A = \left\{ \dfrac{100}{k} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ y sea $f\colon [0,100] \to [0,1]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Considere la partición P de $[0,100]$ dada por $P = \{0, 14, 21, 24, 27, 29, 31, 34, 39, 48, 51, 77, 97, 100\}$. Calcule la suma inferior $s(f,P)$ y la suma superior $S(f,P)$.

Si usa un teorema, no olvide verificar explícitamente cada una de sus hipótesis.

Duración: 3h.