Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal MA1102-2025-1

Control 1 - Otoño 2025

P1. Considere el siguiente sistema donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro fijo:

$$\begin{aligned} x + \ \ y + az &= 1, \\ x + ay + \ \ z &= a, \\ ax + \ \ y + \ \ z &= a^2. \end{aligned} \tag{1}$$

a) (2.0 ptos) Determine la inversa de la matriz A asociada al sistema lineal en (1) cuando $a = -1$.

b) (4.0 ptos) Indique todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que el sistema en (1):

i. tiene solución única,

ii. no tiene solución,

iii. tiene infinitas soluciones.

P2. *a*) Sea V el espacio de las matrices de 2×2 a coeficientes en $\mathbb{R}$ cuyos coeficientes suman cero. Es decir,

$$V = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a + b + c + d = 0 \right\}.$$

1) (2.0 ptos) Demuestre que las tres siguientes matrices forman una base de V:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

¿Puede un conjunto $\{A, B\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ generar V? Justifique.

2) (2.0 ptos) Para X, Y y Z dadas por

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \ Z = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

encuentre una base $\mathcal{B}$ de $W = \langle \{X, Y, Z\} \rangle$ incluída en $\{X, Y, Z\}$, y extiéndala a una base de V.

b) (2.0 ptos) Sea $\{u, v\}$ conjunto linealmente independiente en un espacio vectorial. Pruebe que $\{2u+v, u+2v\}$ también es un conjunto linealmente independiente.

P3. *a*) Sea $U = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, \, p(x) = p(2x)\}$.

1) (1.5 ptos) Pruebe que U es un subespacio vectorial del espacio de los polinomios a coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado a lo más tres.

2) (2.0 ptos) Encuentre una base de U.

b) Sea S sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y sea $S^\perp$ su ortogonal dado por

$$S^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall s \in S, s^T x = 0\}.$$

1) (1.0 ptos) Pruebe que si $v \in S \cap S^\perp$, entonces $\|v\| = 0$. Concluya que $S \cap S^\perp = \{0\}$.

2) (1.5 ptos) Sea T otro sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Pruebe que $(S + T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp$.

Tiempo: 3.0 hrs.