Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1002: Cálculo Diferencial e Integral. 2025-1

Pauta de corrección Control 1

P1. Considere la función $f\colon (1,2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(2-x)}.$$

a) **(1,5 pts.)** Determine dónde f es derivable, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in (1,2)$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

Solución

Como f es una función racional, es conocidamente derivable.

(0,3 pts. por justificar la derivabilidad de f)

Alternativa

También se puede justificar "por álgebra de funciones derivables", identificando que la función es un cociente de polinomios, o un polinomio dividido por una multiplicación de polinomios.

Calculamos f':

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{(x-1)(2-x)}\right)' \\ &= \frac{1\cdot(x-1)(2-x) - x\cdot[(x-1)\cdot(-1)+(2-x)\cdot 1]}{(x-1)^2(2-x)^2} && \textbf{(0,4 pts. por usar la regla del cociente)} \\ &= \frac{(-x^2+3x-2)+(2x^2-3x)}{(x-1)^2(2-x)^2} \\ &= \frac{x^2-2}{(x-1)^2(2-x)^2}. && \textbf{(0,2 pts. por encontrar la derivada)} \end{aligned}$$

Imponemos ahora $f'(\bar{x}) = 0$ para encontrar que

$$\begin{aligned} f'(\bar{x}) = 0 &\iff \frac{\bar{x}^2-2}{(\bar{x}-1)^2(2-\bar{x})^2} = 0 && \textbf{(0,2 pts. por plantear la ecuación)} \\ &\iff \bar{x}^2 - 2 = 0 \\ &\iff \bar{x}^2 = 2 \\ &\iff \bar{x} = \pm\sqrt{2}. && \textbf{(0,2 pts. por resolver la ecuación)} \end{aligned}$$

Descartamos $\bar{x} = -\sqrt{2}$ porque no pertenece al dominio $(1,2)$ de f. Así, el único punto $\bar{x} \in (1,2)$ tal que $f'(\bar{x}) = 0$ es $\bar{x} = \sqrt{2}$. **(0,2 pts. por encontrar el punto crítico de f)**

Indicaciones de corrección

- Si solo se usa la frase "por álgebra de funciones derivables" o "por álgebra y composición de funciones derivables", se asignan **(0,1 pts.)**
- Hay otras maneras válidas de calcular la derivada. Por ejemplo, se puede pensar como un producto de dos expresiones:

$$f'(x) = \left(x\cdot\frac{1}{(x-1)(2-x)}\right)' = x'\cdot\frac{1}{(x-1)(2-x)} + x\cdot\left(\frac{1}{(x-1)(2-x)}\right)',$$

como un producto de tres expresiones:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{2-x}\right) \\ &= x' \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{2-x} + x \cdot \left(\frac{1}{x-1}\right)' \cdot \frac{1}{2-x} + x \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \left(\frac{1}{2-x}\right)', \end{aligned}$$

como un producto con una potencia negativa:

$$f'(x) = (x \cdot [(x-1)(2-x)]^{-1})' = x' \cdot [(x-1)(2-x)]^{-1} + x \cdot ([(x-1)(2-x)]^{-1})',$$

etc.

- Si se indica que los puntos críticos son $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$, solo se deben descontar **(0,1 pts.)**

b) **(1,5 pts.)** Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f.

Solución

Para determinar los intervalos de monotonía de f, analizamos el signo de f'. Tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff \frac{x^2-2}{(x-1)^2(2-x)^2} \geq 0 && \textbf{(0,3 pts. por plantear la desigualdad)} \\ &\iff x^2 - 2 \geq 0 \\ &\iff x^2 \geq 2 \\ &\iff x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty). && \textbf{(0,2 pts. por resolver la desigualdad)} \end{aligned}$$

Como el dominio de f es $(1,2)$, descartamos los valores menores o iguales a 1, o mayores o iguales a 2. Así, el intervalo donde $f'(x) \geq 0$ es $[\sqrt{2}, 2)$.
Obtenemos que f es creciente en el intervalo $[\sqrt{2}, 2)$ y decreciente en el intervalo $(1, \sqrt{2}]$, lo que se puede resumir en la siguiente tabla:

	1	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Tabla 1: Intervalos de monotonía de f.

(0,7 pts. por identificar los intervalos de monotonía)

Ahora, de la parte anterior el único candidato a mínimo o máximo local es $\bar{x} = \sqrt{2}$. Notamos que f es decreciente antes de $\bar{x} = \sqrt{2}$, y creciente después de $\bar{x} = \sqrt{2}$, por lo que $\bar{x} = \sqrt{2}$ es un mínimo local de f.

(0,1 pts. por identificar el mínimo local)

Más aún, es un mínimo global porque esto es válido en todo el dominio de f.

(0,1 pts. por identificar que el mínimo es global)

Deducimos también que f no tiene máximos (ni locales ni globales).

(0,1 pts. por mencionar que f no tiene máximos)

Indicaciones de corrección

- La desigualdad se puede plantear como $f'(x) \geq 0$, $f'(x) \leq 0$, $f'(x) > 0$ o $f'(x) < 0$. Todas estas opciones conducen a una respuesta correcta.
- No es necesario especificar los intervalos de monotonía en prosa; basta con la tabla. De manera similar, no es necesario escribir la tabla si se describen en prosa.
- Si los intervalos de monotonía se describen en prosa, pueden escribir se como intervalos cerrados en $\sqrt{2}$ (es decir, $(1, \sqrt{2}]$ y $[\sqrt{2}, 2)$) o abiertos en $\sqrt{2}$ (es decir, $(1, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, 2)$). Cualquiera de estas opciones es válida y recibe puntaje completo.

c) **(1,5 pts.)** Determine dónde f es dos veces derivable y muestre que

$$f''(x) = \frac{2(x^3 - 6x + 6)}{(x-1)^3(2-x)^3}$$

allí.

Solución

Tenemos que

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2}{(x-1)^2(2-x)^2}$$

es derivable en todo su dominio porque es una función racional.

(0,5 pts. por justificar la derivabilidad de f)

Alternativa

También se puede justificar "por álgebra de funciones derivables", identificando que la función es un cociente de polinomios, o un polinomio dividido por una multiplicación de polinomios.

Calculamos $f''(x)$:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{x^2-2}{(x-1)^2(2-x)^2}\right)' \\
&= \frac{2x \cdot (x-1)^2(2-x)^2 - [2(x-1)(2-x)^2 - 2(2-x)(x-1)^2] \cdot (x^2-2)}{(x-1)^4(2-x)^4}
\end{aligned}$$

(0,5 pts. por usar la regla del cociente)

$$\begin{aligned}
&= \frac{2x \cdot (x-1)(2-x) - [2(2-x) - 2(x-1)] \cdot (x^2-2)}{(x-1)^3(2-x)^3} \\
&= \frac{2[x(x-1)(2-x) - (3-2x)(x^2-2)]}{(x-1)^3(2-x)^3} \\
&= \frac{2[(-x^3+3x^2-2x) - (-2x^3+3x^2+4x-6)]}{(x-1)^3(2-x)^3} \\
&= \frac{2(x^3-6x+6)}{(x-1)^3(2-x)^3}.
\end{aligned}$$

(0,5 pts. por llegar a la fórmula pedida para f'')

Indicaciones de corrección

- Al igual que en la parte a), hay muchas maneras válidas de calcular la derivada. Si los pasos son correctos, se debe asignar puntaje completo.

d) **(1,5 pts.)** Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).
Indicación: Analice la monotonía del polinomio $P\colon (1,2) \to \mathbb{R}$ dado por $x^3 - 6x + 6$, y concluya que el valor mínimo que alcanza es $6 - 4\sqrt{2} > 0$.

Solución

Para determinar dónde f es convexa y cóncava, debemos determinar el signo de f''. Tenemos que

$$f''(x) \geq 0 \iff \frac{2(x^3-6x+6)}{(x-1)^3(2-x)^3} \geq 0$$

(0,2 pts. por plantear la desigualdad)

$$\iff x^3 - 6x + 6 \geq 0$$

$$\iff P(x) \geq 0,$$

(0,2 pts. por llegar a que se debe analizar el signo de P)

ya que $x - 1 > 0$ y $2 - x > 0$ para todo $x \in (1,2)$.
Siguiendo la indicación, encontremos el mínimo de P. Como P es un polinomio, P es derivable y su derivada es $P'(x) = 3x^2 - 6$. **(0,1 pts. por justificar que el polinomio es derivable)**
Tenemos que:

$$P'(x) \geq 0 \iff 3x^2 - 6 \geq 0$$

(0,2 pts. por plantear la desigualdad)

$$\iff x^2 \geq 2$$
$$\iff x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty).$$ **(0,2 pts. por resolver la desigualdad)**

Nuevamente, descartamos los valores menores o iguales a 1, o menores o iguales a 2. Así P es decreciente en el intervalo $(1, \sqrt{2}]$, y creciente en el intervalo $[\sqrt{2}, 2)$. Por lo tanto, f tiene un mínimo global en $\bar{x} = \sqrt{2}$.

(0,3 pts. por encontrar el mínimo)

Evaluando,
$$P(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 6 = 6 - 4\sqrt{2} > 0.$$

Deducimos entonces que el valor mínimo que alcanza P es estrictamente positivo, por lo que todos los valores que alcanza son estrictamente positivos. Como el signo de P es igual al de f'', concluimos que $f''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 2)$. Esto muestra que f es convexa en todo su dominio.

(0,3 pts. por verificar que f es convexa)

Indicaciones de corrección

- No es necesario justificar que $6 - 4\sqrt{2} > 0$ porque es parte de la indicación.

P2. Para $\alpha, \beta, \gamma > 0$, considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x^2+1} & x < 0 \\ \beta & x = 0 \\ \dfrac{\gamma}{x^3+1} & x > 0. \end{cases}$$

a) **(2,0 pts.)** Determine qué condiciones sobre α, β y γ que hacen que f sea continua en $\mathbb{R}$.
Indicación: Debe encontrar las condiciones que aseguren la continuidad en todo $\mathbb{R}$ si se cumplen y que, a su vez, aseguren una discontinuidad en algún punto de $\mathbb{R}$ si no se cumplen.

Durante el resto del problema, suponga que α, β y γ toman valores que hacen a f continua en $\mathbb{R}$.

Solución

Notemos primero que f es continua en todo $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ independiente de los valores de α, β y γ.
En efecto, f coincide con la función racional $\frac{\alpha}{x^2+1}$ en el intervalo $(-\infty, 0)$. Por lo tanto, es continua en $\bar{x}$ para todo $\bar{x} < 0$. **(0,5 pts. por justificar que es continua en $\bar{x}$ cuando $\bar{x} < 0$)**
De manera similar, f coincide con la función racional $\frac{\gamma}{x^3+1}$ en el intervalo $(0, \infty)$. Así, f es continua en $\bar{x}$ para todo $\bar{x} > 0$. **(0,5 pts. por justificar que es continua en $\bar{x}$ cuando $\bar{x} > 0$)**
Veamos ahora qué condiciones son necesarias y suficientes para que f sea continua en $\bar{x} = 0$. Esto se tiene si y solo si

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x),$$ **(0,5 pts. por la definición de continuidad en $\bar{x} = 0$)**

es decir, si y solo si

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\alpha}{x^2+1} = \beta = \lim_{x \to 0^+} \frac{\gamma}{x^3+1}.$$ **(0,3 pts. por plantear la igualdad)**

Como las funciones $\frac{\alpha}{x^2+1}$ y $\frac{\gamma}{x^3+1}$ son continuas en $\bar{x} = 0$ al ser funciones racionales, esto es equivalente a que

$$\frac{\alpha}{0^2+1} = \beta = \frac{\gamma}{0^3+1},$$

que, a su vez, es equivalente a $\alpha = \beta = \gamma$. **(0,2 pts. por llegar a la igualdad)**

Indicaciones de corrección

- También es posible decir que f coincide con $\frac{\alpha}{x^2+1}$ o $\frac{\gamma}{x^3+1}$ "en torno" a un $\bar{x}$ negativo o positivo, respectivamente. No es necesario especificar en qué intervalo coinciden. Esto recibe puntaje completo.

  Más formalmente, se puede argumentar que existe $\delta > 0$ tal que estas funciones coinciden en $(\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta)$.

Sin embargo, no es necesario decirlo de esta forma.

- Si no se usa la continuidad de las funciones $\frac{\alpha}{x^2+1}$ y $\frac{\gamma}{x^3+1}$ para justificar el cálculo de límite, se deben descontar solo **(0,1 pts.)**

b) **(2,0 pts.)** Demuestre que f es derivable en todo su dominio y calcule su derivada.

Solución

Debido a la parte anterior, suponemos que $\alpha = \beta = \gamma$. Podemos reescribir f en función de solo α como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x^2+1} & x < 0 \\ \alpha & x = 0 \\ \dfrac{\alpha}{x^3+1} & x > 0. \end{cases}$$

Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}$ y veamos que f es derivable en $\bar{x}$.
Como f coincide con la función racional $\frac{\alpha}{x^2+1}$ en el intervalo $(-\infty, 0)$, es derivable en $\bar{x}$ si $\bar{x} < 0$. Así, tenemos que:

$$f'(\bar{x}) = -\frac{2\alpha\bar{x}}{(\bar{x}^2+1)^2}. \qquad \textbf{(0,5 pts. por verificar que es derivable en } \bar{x} < 0\textbf{)}$$

De manera similar, f coincide con la función racional $\frac{\alpha}{x^3+1}$ en el intervalo $(0, \infty)$. Así, vemos que

$$f'(\bar{x}) = -\frac{3\alpha\bar{x}^2}{(\bar{x}^3+1)^2}. \qquad \textbf{(0,5 pts. por verificar que es derivable en } \bar{x} > 0\textbf{)}$$

Si $\bar{x} = 0$, debemos usar la definición de derivada. Calculamos los dos límites laterales.
Primero, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\bar{x}^-} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\alpha}{x^2+1} - \alpha}{x} && \textbf{(0,2 pts. por plantear este límite lateral)} \\ &= \alpha \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{-x^2}{x^2+1}}{x} \\ &= \alpha \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x^2+1} \\ &= \alpha \cdot \frac{-0}{0^2+1} = 0, && \textbf{(0,2 pts. por calcular este límite lateral)} \end{aligned}$$

donde se usó la continuidad de $\frac{-x}{x^2+1}$ en $\bar{x} = 0$. Luego, vemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\bar{x}^+} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\alpha}{x^3+1} - \alpha}{x} && \textbf{(0,2 pts. por plantear este límite lateral)} \\ &= \alpha \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-x^3}{x^3+1}}{x} \\ &= \alpha \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x^3+1} \\ &= \alpha \cdot \frac{-0"}{0^3+1} = 0, && \textbf{(0,2 pts. por calcular este límite lateral)} \end{aligned}$$

donde se usó la continuidad de $\frac{-x^2}{x^3+1}$ en $\bar{x} = 0$.
Como los límites laterales coinciden, concluimos que f es derivable en $\bar{x} = 0$ y que $f'(0) = 0$.

(0,2 pts. por encontrar la derivada en $\bar{x} = 0$)

En conclusión, la derivada de f es igual a

$$f'(\bar{x}) = \begin{cases} -\dfrac{2\alpha\bar{x}}{(\bar{x}^2+1)^2} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\dfrac{2\alpha\bar{x}^2}{(\bar{x}^3+1)^2} & x > 0. \end{cases}$$

Indicaciones de corrección

- También es posible decir que f coincide con $\frac{\alpha}{x^2+1}$ o $\frac{\alpha}{x^3+1}$ "en torno" a un $\bar{x}$ negativo o positivo, respectivamente. No es necesario especificar en qué intervalo coinciden. Esto recibe puntaje completo.

  Más formalmente, se puede argumentar que existe $\delta > 0$ tal que estas funciones coinciden en $(\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta)$. Sin embargo, no es necesario decirlo de esta forma.

- Si no se usa la continuidad de las funciones $\frac{-x}{x^2+1}$ en $\bar{x} = 0$ o $\frac{-x^2}{x^3+1}$ en $\bar{x} = 0$ para el cálculo de los límites, se deben descontar **(0,1 pts.)** cada vez que ocurra.

- Algunos límites de la forma $0/0$ también se pueden calcular usando la regla de l'Hôpital. Si se usa, se debe argumentar por qué el numerador y el denominador son derivables (por ejemplo, diciendo que son funciones polinomios o funciones racionales), por qué la derivada del denominador no se anula cerca de $\bar{x}$ e indicar que el límite original existe porque el nuevo límite existe (lo que se puede indicar usando el símbolo "$\overset{(\text{l'Hôp.})}{=}$" u otro similar). Si se usa la regla de l'Hôpital sin justificación, se deben descontar, una única vez, **(0,2 pts.)**

c) **(2,0 pts.)** ¿Qué condición adicional debe cumplir α para que la ecuación $f(x) = \pi$ tenga solución?

Solución

De la parte anterior, y usando que $\alpha > 0$, vemos que f' es creciente si $x < 0$ y decreciente si $x > 0$. Por lo tanto, f tiene un máximo global en $\bar{x} = 0$. El valor que alcanza en este punto es $f(0) = \alpha$.
(0,4 pts. por verificar que f tiene máximo en 0)

Alternativa

También se puede mencionar directamente que f es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, \infty)$ argumentando que el denominador de $\frac{\alpha}{x^2+1}$ y de $\frac{\alpha}{x^3+1}$ crece cuando el valor absoluto de x lo hace.

Así, $\alpha < \pi$, tenemos que todos los valores que alcanza f son estrictamente menores que π. Por lo tanto, la ecuación $f(x) = \pi$ no tiene solución. **(0,5 pts. por verificar que no tiene solución si $\alpha < \pi$)**
Supongamos ahora que $\alpha \geq \pi$. Por un lado, tenemos que $f(0) \geq \pi$. Por otro lado, tenemos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Deducimos de aquí que debe existir $b > 0$ tal que $f(b) < \pi$. Vemos que f toma valores menores que π y mayores o iguales que π en el intervalo $[0, b]$. **(0,5 pts. por verificar esta hipótesis del TVI)**
Sabemos además que f es continua. **(0,3 pts. por verificar esta hipótesis del TVI)**
Ahora, el teorema de los valores intermedios (TVI), aplicado en el intervalo $[0, b]$, asegura que la ecuación $f(x) = \pi$ tiene solución. **(0,3 pts. por aplicar el TVI)**
En conclusión, la ecuación $f(x) = \pi$ tiene solución si y solo si $\alpha \geq \pi$.

Indicaciones de corrección

- No es necesario especificar el intervalo donde se aplica el TVI. Basta con decir que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ para concluir que f toma valores menores que π.

- También se puede argumentar que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

- Se puede escribir además que f toma valores menores o iguales a π en vez de menores que π.

P3. a) **(3,0 pts.)** Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Suponga que existe $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tal que $f(\bar{x}) > 0$. Demuestre que existe un intervalo abierto I tal que $\bar{x} \in I$ y además $f(x) > 0$ para todo $x \in I$.

Solución

Primera forma (Usando la caracterización ε-δ)

Usamos la definición ε-δ de continuidad. Sea $0 < \varepsilon < f(\bar{x})$. Como f es continua en $\bar{x}$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ implica que $f(x) \in (f(\bar{x}) - \varepsilon, f(\bar{x}) + \varepsilon)$.

(1,0 pto. por plantear la caracterización ε-δ)

El hecho de que $\varepsilon < f(\bar{x})$ muestra que $f(\bar{x}) - \varepsilon > 0$. Por lo tanto, el intervalo $(f(\bar{x}) - \varepsilon, f(\bar{x}) + \varepsilon)$ contiene solo números estrictamente positivos.

(1,0 pto. por concluir que este intervalo es positivo)

Concluimos de este modo que, si $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$, entonces $f(x)$ es estrictamente positivo. Así, podemos elegir el intervalo abierto buscado como $I = (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$.

(1,0 pto. por encontrar el intervalo abierto)

Segunda forma (Por contradicción y usando sucesiones)

Supongamos por contradicción que el intervalo abierto I no existe.

(0,3 pts. por usar contradición)

Esto significa que, sin importar qué tan pequeño sea un intervalo abierto en torno a $\bar{x}$, siempre habrá puntos con imágenes no positivas.

En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in (\bar{x} - 1/n, \bar{x} + 1/n)$ con $f(x_n) \leq 0$.

(0,7 pts. por obtener una sucesión adecuada)

Notemos que la sucesión (x_n) tiende a $\bar{x}$ ya que los intervalos $(\bar{x} - 1/n, \bar{x} + 1/n)$ se encajonan en torno a $\bar{x}$. **(0,5 pts. por verificar la convergencia)**

Como f es continua en $\bar{x}$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x}) > 0.$$ **(1,0 pto. por usar la definición de continuidad)**

Sin embargo, sabemos que $f(x_n) \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que es una contradicción.

(0,5 pts. por llegar en la contradicción)

Indicaciones de corrección

- No es necesario que las demostraciones sean tan formales como las de la pauta. Por ejemplo, la primera forma puede argumentarse como "Sabemos que $f(\bar{x}) > 0$. Por lo tanto, podemos construir un intervalo J en torno a $f(\bar{x})$ que no toque a 0. Por la continuidad, existe un intervalo I en torno a $\bar{x}$ que hace que todos los valores de f en I estén dentro de J, así que son todos positivos".

b) **(3,0 pts.)** Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que existe $M > 0$ con $0 \leq f'(x) \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$f(x + h) \leq f(x) + Mh$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y $h > 0$.

Solución

Sean $x \in \mathbb{R}$ y $h > 0$. Como f es derivable en $\mathbb{R}$, en particular es continua en $[x, x+h]$ y derivable en $(x, x+h)$.

(0,5 pts. por justificar las hipótesis del TVM)

Por lo tanto, podemos usar el teorema del valor medio (TVM) en este intervalo para concluir que existe $\xi \in (x, x + h)$ tal que:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = f'(\xi).$$ **(1,0 pto. por usar el TVM)**

Reordenando, obtenemos que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(\xi) \implies f(x+h) - f(x) = hf'(\xi).$$ **(0,5 pts. por reordenar)**

Ahora, sabemos que $f'(x) \leq M$. Por lo tanto,

$f(x+h) - f(x) \leq Mh \implies f(x+h) \leq f(x) + Mh$. **(1,0 pto. por usar la hipótesis y llegar al resultado)**

Indicaciones de corrección

- Si se justifica solo una de las hipótesis del TVM, se asignan **(0,3 pts)**.