Control 1

P1. Considere la función $f\colon (1,2) \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(2-x)}.$$

a) **(1,5 pts.)** Determine dónde f es derivable, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in (1,2)$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

b) **(1,5 pts.)** Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos y máximos, locales y globales, de f.

c) **(1,5 pts.)** Determine dónde f es dos veces derivable y muestre que
$$f''(x) = \frac{2(x^3 - 6x + 6)}{(x-1)^3(2-x)^3}$$
allí.

d) **(1,5 pts.)** Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).
Indicación: Analice la monotonía del polinomio $P\colon (1,2) \to \mathbb{R}$ dado por $x^3 - 6x + 6$, y concluya que el valor mínimo que alcanza es $6 - 4\sqrt{2} > 0$.

P2. Para $\alpha, \beta, \gamma > 0$, considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x^2+1} & x < 0 \\ \beta & x = 0 \\ \dfrac{\gamma}{x^3+1} & x > 0. \end{cases}$$

a) **(2,0 pts.)** Determine qué condiciones sobre α, β y γ que hacen que f sea continua en $\mathbb{R}$.
Indicación: Debe encontrar las condiciones que aseguren la continuidad en todo $\mathbb{R}$ si se cumplen y que, a su vez, aseguren una discontinuidad en algún punto de $\mathbb{R}$ si no se cumplen.

Durante el resto del problema, suponga que α, β y γ toman valores que hacen a f continua en $\mathbb{R}$.

b) **(2,0 pts.)** Demuestre que f es derivable en todo su dominio y calcule su derivada.

c) **(2,0 pts.)** ¿Qué condición adicional debe cumplir α para que la ecuación $f(x) = \pi$ tenga solución?

P3. a) **(3,0 pts.)** Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Suponga que existe $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tal que $f(\bar{x}) > 0$. Demuestre que existe un intervalo abierto I tal que $\bar{x} \in I$ y además $f(x) > 0$ para todo $x \in I$.

b) **(3,0 pts.)** Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que existe $M > 0$ con $0 \leq f'(x) \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que
$$f(x+h) \leq f(x) + Mh$$
para todo $x \in \mathbb{R}$ y $h > 0$.

Si usa un teorema, no olvide verificar explícitamente cada una de sus hipótesis.

Duración: 3h.