Control C2 Introducción al cálculo 10 Enero 2024.

P1 (a) Considere la función

$$f(x)=\frac{5-3x}{x-2}$$

(i) • $\boxed{\text{Dominio}}$: tenga en cuenta que para que la función este bien definida debe ser

0.1

$$x-2\neq 0$$

$$\therefore \ \mathrm{Dom}\, f := \mathbb{R}\setminus\{2\}$$

• $\boxed{\text{Ceros de la función}}$: En este caso se analiza el numerador y nos damos cuenta que para que $f(x)=0$, debe ser $5-3x=0$, en conclusión

0.1

dos / el cero de la función corresponde a

$$x=5/3$$

0.8

• $\boxed{\text{Intervalos de Crecimiento}}$: Vamos a analizar en cada parte del dominio de la función:

a) $x\in(2,\infty) \Rightarrow x-2>0$

Sean $x_1, x_2\in(2,\infty)$ con $x_1<x_2$, entonces podemos reescribir convenientemente

$$6x_1-5x_1 < 6x_2-5x_2$$

$$5x_2+6x_1 < 6x_2+5x_1$$

Factor común, Agrupación

$$5x_2+6x_1-10-3x_1x_2 < 6x_2+5x_1-10-3x_1x_2$$

$$(5-3x_1)(x_2-2) < (5-3x_2)(x-2)$$

Como $x_1 - 2 > 0$ podemos multiplicar por los respectivos
$x_2 - 2 > 0$ inversos multiplicativos y la
desigualdad no cambia de sentido
así que

$$\frac{5-3x_1}{x_1-2} < \frac{5-3x_2}{x_2-2} \quad (*)$$

<u>Nota:</u> Claramente la idea original sería que empezaran con la comparación en (*) y lleguen a algo que saben que es cierto, en este caso que $x_1 < x_2$.

(b) Para $x \in (-\infty, 2)$ se tiene que $x - 2 < 0$ /

Sean $x_1, x_2 \in (-\infty, 2)$ y analicemos la siguiente desigualdad y veamos si llegamos a algo <u>cierto</u>.

$$f(x_1) \overset{?}{<} f(x_2)$$

$$\frac{5-3x_1}{x_1-2} < \frac{5-3x_2}{x_2-2}$$

dado que
$x_2 - 2 < 0$ y
$x_1 - 2 < 0$

$$(x_2-2)\frac{(5-3x_1)}{x_1-2} > 5-3x_2$$

$$(x_2-2)(5-3x_1) < (5-3x_2)(x_1-2)$$

$$5x_2 - 10 - 3x_1x_2 + 6x_1 < 5x_1 - 10 - 3x_2x_1 + 6x_2$$

$$6x_1 - 5x_1 < 6x_2 - 5x_2$$

$$\underbrace{x_1 < x_2}$$

lo cual sabemos que se cumple.

Luego podemos decir que la función es creciente en cada parte de su dominio.

P1. (a) (ii)

- Notemos porque -3 no puede pertenecer al rango de la función. Si existiera $x \in Dom f$ tal que

Rango. $\boxed{0.8}$

$$f(x) = -3 \text{ , entonces}$$

$$\frac{5-3x}{x-2} = -3$$

$$5-3x = -3(x-2)$$

$$5-3x = -3x+6$$

$$5 = 6$$ llegamos a una contradicción..

Para los demás valores en $\mathbb{R}$ su ecuación

$$\frac{5-3x}{x-2} = a \quad , \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

$$5-3x = ax-2a$$

$$-3x-ax = -2a-5$$

$$-(3+a)x = -(2a+5)$$

$$(3+a)x = 2a+5 \qquad 3+a \neq 0$$

$$x = \frac{2a+5}{3+a}$$ siempre tiene sol.

Por lo tanto $\forall\ y \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ siempre existe $x \in Dom f$ tal que $f(x) = y$.

- **Inyectividad:** Para esta parte usemos el siguiente criterio

$\boxed{0.6}$ $f(x)$ es inyectiva si

$$f(x_1) = f(x_2) \overset{\text{implica que}}{\Rightarrow} x_1 = x_2.$$

Esto es: Sean $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}\, f$ y suponga que

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{5-3x_1}{x_1-2} = \frac{5-3x_2}{x_2-2}$$, de lo ant. hecho para el crecimiento

$$5x_2 + 6x_1 = 6x_2 + 5x_1$$

$$6x_1 - 5x_1 = 6x_2 - 5x_2$$

$$x_1 = x_2$$

$\therefore$ la función es inyectiva.

$\boxed{0.6}$

- **Inversa:** La función inversa se define en los sgts conjuntos

$$f^{-1} : \mathbb{R}\setminus\{-3\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{2\}$$

$$y \longrightarrow x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Para encontrar su expresión algebraica asociada, podemos "despejar" x en la siguiente

$$y = \frac{5-3x}{x-2}$$

$$(x-2)y = 5-3x$$

$$xy - 2y = 5-3x$$

$$xy + 3x = 5+2y$$

$$x(y+3) = 5+2y$$

$$x = \frac{5+2y}{y+3}$$

$\therefore$ la función

$$f^{-1}(y) = \frac{5+2y}{y+3}$$

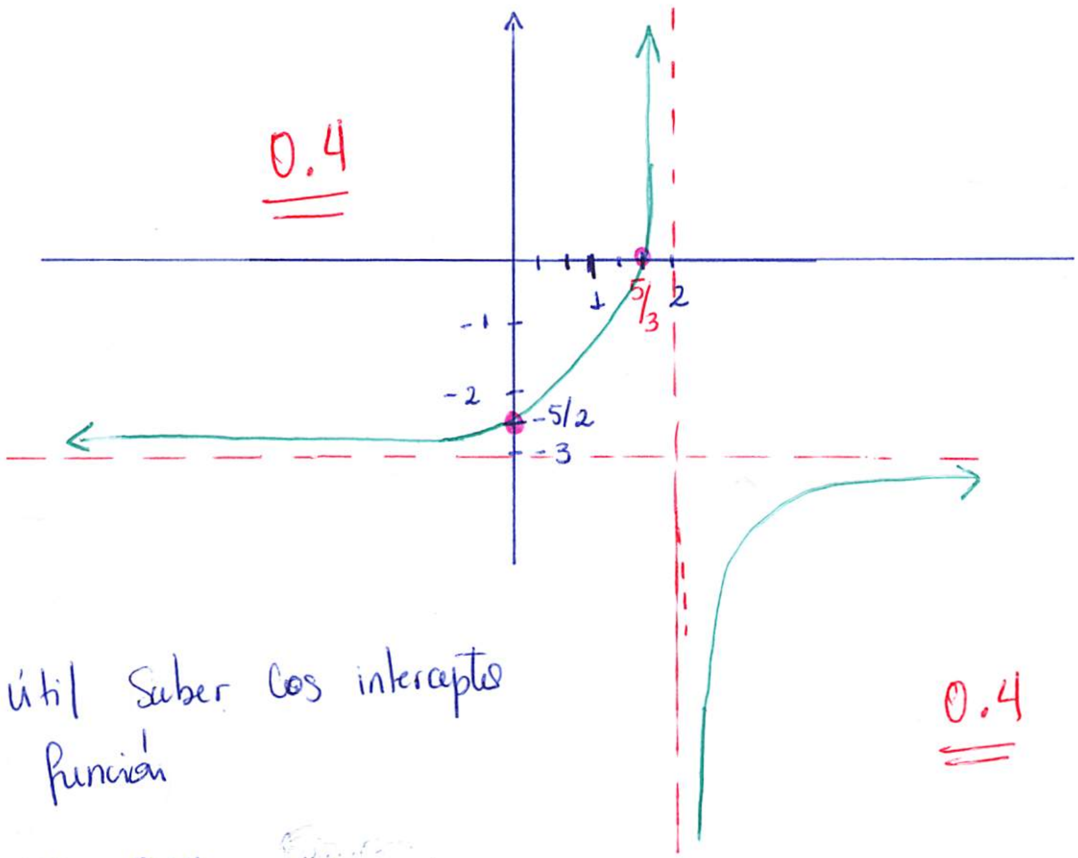
P1. (a)

(iii) Usando la información anterior sabemos que.

la recta $x = 2$ es una asíntota vertical 0.1

Mientras que la recta

$y = -3$ es una asíntota horizontal 0.1



Sería útil saber los interceptos de la función

Sabemos que

el cero de la función es $x = 5/3$

Ahora, si evaluamos en $x = 0$

$f(0) = -5/2$

Con esta información y siguiendo las asíntotas se obtiene

P1 (b) Encontrar los ceros de la función

$$h(x) = 1 - \cos 2x + 3\cos x$$

es equivalente a encontrar las soluciones de la ecuación

$$h(x) = 0$$

esto es:

$$1 - \cos 2x + 3\cos x = 0$$

ahora el lado iz-quierdo lo podemos simplificar de forma conveniente

$$1 - \cos 2x + 3\cos x = 1 - (\cos^2 x - \sin^2 x) + 3\cos x$$

$$= 1 - (\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) + 3\cos x$$

$$= 2 - 2\cos^2 x + 3\cos x$$

En la anterior línea (la 1ra se usó la identidad de $\cos 2x$) la cual se obtiene de la sgt forma

$$\left.\begin{aligned}\cos(2x) = \cos(x+x) &= \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x)\end{aligned}\right\}$$

Fué asignada como tarea. Deben probarla para usarla.

Continuando, debemos encontrar x tal que.

$$2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 0$$

>> Hasta aquí 1 pts.

Si pensamos en $y = \cos x$ entonces lo que obtenemos es:

$$2 - 2y^2 + 3y = 0$$

$$2y^2 - 3y - 2 = 0$$

y usando formula cua..... se tiene $y = -1/2$ o $y = 2$ >> Hasta aquí 0.5pts

Observamos que $\cos x = y$ no puede ser $\underline{\underline{2}}$, esto es

$$\cos x = 2 \text{ no tiene sol.}$$

Por tanto, solo basta resolver la ecuación

$$\cos x = -1/2$$

usando la tabla de referencia sabemos que en $[0, \pi]$

$$\cos x = -1/2 \quad \text{cuando} \quad x = \frac{2\pi}{3}$$

dado que $\cos(\pi/3) = 1/2$ y sabemos que

y $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$

$$\cos(2\pi/3) = \cos(\pi - \pi/3) = \cancel{\cos(\pi)}^{-1}\cos(\pi/3) + \cancel{\sin(\pi)}^{0}\sin(\pi/3).$$

$$= -1/2$$

Finalmente el conjunto solución está dado por

$$S = \{ x \in \mathbb{R} / x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z} \}$$

Hasta aquí >> $\underline{0.5 \text{pts}}$

P2(a): Considere la función

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) + \cos^2(x) - \cos(2x)}{\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)}$$

(i) usando la identidad demostrada antes

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x).$$

Entonces el denominador se escribe como

$$\operatorname{sen}(x) + \cos^2(x) - \cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)$$

$$= \operatorname{sen} x(1 + \operatorname{sen}(x)).$$

0.4

Mientras que en el denominador tenemos.

$$\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(x) - \frac{\cancel{2}\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cancel{2}}$$

$$= \operatorname{sen}(x)(1 - \cos x).$$

0.2

Así $$g(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)(1 + \operatorname{sen}(x))}{\operatorname{sen}(x)(1 - \cos x)}$$

0.4

$$g(x) = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$$

Siempre que $\underbrace{\operatorname{sen}(x) \neq 0}$

Esto debe tenerse en cuenta para el Dominio de la función

(ii) **Dominio** Para analizar el dominio, debemos tener en cuenta que para que la función esté bien definida debe ser

$$1-\cos x \neq 0 \quad \wedge \quad \operatorname{sen} x \neq 0$$

Entonces para saber que puntos debemos excluir del dominio resolvemos

0.8

$$1-\cos x = 0 \qquad \qquad \operatorname{sen} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 \qquad \qquad \Leftrightarrow x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbb{R} \,/\, x = 2k\pi \ \vee\ x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

Signos: Notemos que ahora podemos concentrarnos en la función simplificada

0.5

$$g(x) = \frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\cos x}$$

Sabemos que $\forall x\in\mathbb{R}$ $-1\leq \operatorname{sen} x \leq 1$ $\wedge$ $-1\leq\cos(x)\leq 1$

$\therefore$ $0\leq 1+\operatorname{sen} x \leq 2$ y $0\leq 1-\cos x \leq 2$

luego g es no negativa.

Ceros: buscamos los valores de $x\in\operatorname{Dom} g$ tal que

$$g(x)=0.$$

esto es equivalente a resolver la ecuación

0.5

$$1+\operatorname{sen} x = 0$$

$$\operatorname{sen} x = 1$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\text{Ceros} = Z = \{x\in\mathbb{R} / x = 3\pi/2 + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}.$$

Periocidad ~~y~~ e inyectividad:

0.2

» periodo 2π dado que es el cociente de 2 f.p.

» no es inyectiva dado que es periodica

(no es necesario que demuestre lo del periodo min)

(P2. b) De la hipótesis tenemos $\operatorname{Sen}(x+y)=0$ lo cual implica que:

$$\operatorname{Sen}(x+y) = \operatorname{Sen}(x)\cos(y) + \operatorname{Sen}(y)\cos(x) = 0$$

$$\boxed{\operatorname{Sen} x \cos y = -\cos x \operatorname{Sen} y} \quad 1.0$$

Luego

$$\operatorname{Sen}(x+2y) = \operatorname{Sen}((x+y)+y) \quad \text{Es Conveniente } 0.5$$

$$= \cancel{\operatorname{Sen}(x+y)}^{0}\cos(y) + \operatorname{Sen}(y)\cos(x+y).$$

$$= \operatorname{Sen}(y)\cos(x+y)$$

$$= \operatorname{Sen}(y)\left(\cos(x)\cos(y) - \operatorname{Sen}(x)\operatorname{Sen}(y)\right) \quad 0.5$$

$$= \operatorname{Sen}(y)\cos(x)\cos(y) - \operatorname{Sen}^2(y)\operatorname{Sen}(x)$$

$$= (-\operatorname{Sen}(x)\cos y)\cos(y) - \operatorname{Sen}^2 y \operatorname{Sen}(x)$$

$$= -\cos^2(y)\operatorname{Sen}(x) - \operatorname{Sen}^2(y)\operatorname{Sen}(x) \quad 1.0$$

$$= -\operatorname{Sen}(x)\left[\cos^2 y + \operatorname{Sen}^2 y\right] = -\operatorname{Sen}(x)$$

$$= \operatorname{Sen}(-x).$$

P3) (a) Por Teorema del coseno sabemos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \qquad 1.0$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\gamma$$

Sumando

1.0

$$a^2+b^2+c^2 = 2b^2 + 2a^2 + 2c^2 - 2bc\cos\alpha - 2ac\cos\beta - 2ab\cos\gamma$$

$$a^2+b^2+c^2 = 2bc\cos\alpha + 2ac\cos\beta + 2ab\cos\gamma$$

b) del Teorema del seno sabemos que.

$$K = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

Sea D un punto en el lado c del ΔABC tal que. CD es la altura en C y llamemos a esa altura h

entonces $\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b\cdot\operatorname{sen}\alpha$ 1.0

Ahora $\operatorname{sen}\alpha = a\cdot K$ entonces el área está dada por

1.0 → $$A_\Delta = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \frac{c\cdot h}{2} = \frac{c\cdot b\cdot\operatorname{sen}\alpha}{2}$$
$$= \frac{c\cdot b\cdot aK}{2}$$

(c) Notemos que de lo anterior.

1.0

$$\frac{2M}{\operatorname{sen}\alpha} = bc \quad ; \quad \frac{2M}{\operatorname{sen}\beta} = ac \quad \wedge \quad \frac{2M}{\operatorname{sen}\gamma} = ab$$

Luego usando la igualdad en (a) se tiene que

$$4M\left(\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} + \frac{\cos\gamma}{\operatorname{sen}\gamma}\right)$$

$$= 2\left(\frac{2M}{\operatorname{sen}(\alpha)}\cos(\alpha) + \frac{2M}{\operatorname{sen}\beta}\cos\beta + \frac{2M}{\operatorname{sen}\gamma}\cos\gamma\right)$$

$$= 2\left(bc\cos\alpha + ac\cos\beta + ab\cos\gamma\right)$$

1.0

$$= \quad = a^2 + b^2 + c^2$$