Control 3

P1. a) **(3,0 pts.)** Considere $a > 0$ y calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,\mathrm{d}t}{x - \operatorname{sen}(x)}.$$

b) Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Considere además la función $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \int_0^x \big(f(t) - t\big)\,\mathrm{d}t.$$

i) **(1,5 pts.)** Justifique que φ es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$.
ii) **(1,5 pts.)** Demuestre que existe $\xi \in (0,1)$ tal que $f(\xi) = \xi$.
Indicación: Calcule $\varphi(0)$ y $\varphi(1)$.

P2. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$. Para $n \in \mathbb{N}$, considere una partición equispaciada $P_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[0,1]$, esto es, $x_i = \frac{i}{n}$ para $i \in \{0, \ldots, n\}$.
Sean $f_-, f_+\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ las funciones escalonadas asociadas a la partición P_n definidas por

$$f_-(x) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{y} \quad f_+(x) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $x \in (x_{i-1}, x_i)$, e iguales a $f(x_i)$ en cada punto x_i de la partición P_n.

a) **(3,0 pts.)** Pruebe que

$$\int_0^1 f_- = (e-1)\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right) \quad \text{y} \quad \int_0^1 f_+ = (e-1)\cdot e^{1/n}\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right).$$

Indicación: Recuerde la suma geométrica: $\displaystyle\sum_{j=\ell}^{m} r^j = \frac{r^{m+1} - r^\ell}{r-1}$ *para todo* $\ell, m \in \mathbb{N}$ *con* $\ell \le m$ *y* $r \ne 1$.

b) **(3,0 pts.)** Justifique que f es Riemann integrable en $[0,1]$ y pruebe que $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$. Use los resultados previos para calcular la integral $\displaystyle\int_0^1 f$.

P3. a) **(3,0 pts.)** Calcule el área comprendida entre las curvas $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$ cuando $x \in [0, \pi]$.

b) **(3,0 pts.)** Calcule el área de la región del plano delimitada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Si usa un teorema, no olvide verificar explícitamente cada una de sus hipótesis.

Duración: 3h.