Pauta de corrección Control 3

P1. a) **(3,0 pts.)** Considere $a > 0$ y calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,\mathrm{d}t}{x - \operatorname{sen}(x)}.$$

Solución

Notamos, que calculando los límites por separado del numerador y denominador, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^0 \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,\mathrm{d}t = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} x - \operatorname{sen}(x) = 0 - \operatorname{sen}(0) = 0.$$

Luego, el límite pedido es de la forma $\frac{0}{0}$, por lo que aplicaremos L'Hopital.

(1,0 pto. Por ver que se puede aplicar L'Hopital.)

Notar que, usando TFC, obtenemos que

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{\sqrt{a+x}}.$$

Así,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,\mathrm{d}t}{x - \operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+x}} \cdot \frac{1}{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}.$$

(1,0 pto. Por usar L'Hopital.)

Calculamos los límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+x}} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

(0,5 pts. Por calcular los límites.)

Usando lo anterior, el límite pedido da

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,\mathrm{d}t}{x - \operatorname{sen}(x)} = \frac{2}{\sqrt{a}}.$$

(0,5 pts. Por concluir.)

b) Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Considere además la función $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \int_0^x \big(f(t) - t\big)\,\mathrm{d}t.$$

i) **(1,5 pts.)** Justifique que φ es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$.

Solución

Dado que $f(t)$ es continua en $[0,1]$ y t es un polinomio (y, por lo tanto, continuo en $[0,1]$), la función integrando $f(t)-t$ es continua en $[0,1]$. La integral de una función continua en un intervalo cerrado produce una función que es continua en dicho intervalo, por lo que $\varphi(x)$ es continua en $[0,1]$.

(0,5 pts. por indicar que es continua)

Además, el teorema fundamental del cálculo nos asegura que, si $f(t)-t$ es continua en $[0,1]$, entonces $\varphi(x)$ es derivable en $(0,1)$ y su derivada está dada por:

$$\varphi'(x) = f(x) - x, \quad \forall x \in (0,1).$$

(0,5 pts. por indicar que es derivable)

Por lo tanto, $\varphi(x)$ es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$, como queríamos justificar.

(0,5 pts. por concluir)

ii) **(1,5 pts.)** Demuestre que existe $\xi \in (0,1)$ tal que $f(\xi) = \xi$.
Indicación: Calcule $\varphi(0)$ y $\varphi(1)$.

Solución

Para demostrar esto, usaremos el teorema del valor medio. En primer lugar, siguiendo la indicacion, evaluemos $\varphi(0)$ y $\varphi(1)$:

$$\varphi(0) = \int_0^0 \big(f(t) - t\big)\,\mathrm{d}t = 0.$$

$$\varphi(1) = \int_0^1 \big(f(t) - t\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t\,\mathrm{d}t.$$

Se tiene que:

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}, \quad \text{y} \quad \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto:

$$\varphi(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Así, tenemos:

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi(1) = 0.$$

(0,3 pts. por calcular $\varphi(0)$ y $\varphi(1)$)

Por la definición de $\varphi(x)$, su derivada es $\varphi'(x) = f(x) - x$. Por lo tanto, basta probrar que $\varphi'(x) = 0$ en algún punto $\xi \in (0,1)$, para prbar que existe $\xi \in (0,1)$ tal que $f(\xi) = \xi$.

(0,3 pts. por dar lo necesario para obtener el resultado)

Como:

i) $\varphi(x)$ es continua en $[0,1]$.

ii) $\varphi(x)$ es derivable en $(0,1)$.

iii) $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

(0,3 pts. por dar las hipótesis)

Luego, por teorema del valor medio, existe $\xi \in (0,1)$ tal que:

$$\varphi'(\xi) = 0.$$

(0,3 pts. por usar el teorema del valor medio)

Pero sabemos que $\varphi'(x) = f(x) - x$, así que:

$$\varphi'(\xi) = f(\xi) - \xi = 0 \implies f(\xi) = \xi.$$

Por lo tanto, existe $\xi \in (0,1)$ tal que $f(\xi) = \xi$. **(0,3 pts. por concluir)**

P2. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$. Para $n \in \mathbb{N}$, considere una partición equispaciada $P_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[0,1]$, esto es, $x_i = \frac{i}{n}$ para $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Sean $f_-, f_+ \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ las funciones escalonadas asociadas a la partición P_n definidas por

$$f_-(x) = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{y} \quad f_+(x) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $x \in (x_{i-1}, x_i)$, e iguales a $f(x_i)$ en cada punto x_i de la partición P_n.

a) **(3,0 pts.)** Pruebe que

$$\int_0^1 f_- = (e-1) \cdot \left(\frac{1/n}{e^{1/n} - 1} \right) \quad \text{y} \quad \int_0^1 f_+ = (e-1) \cdot e^{1/n} \cdot \left(\frac{1/n}{e^{1/n} - 1} \right).$$

Indicación: Recuerde la suma geométrica: $\displaystyle\sum_{j=\ell}^{m} r^j = \frac{r^{m+1} - r^\ell}{r-1}$ *para todo* $\ell, m \in \mathbb{N}$ *con* $\ell \leq m$ *y* $r \neq 1$.

Solución

Se comienza fijando $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que la función f es creciente. Así, el ínfimo de f en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$ se alcanza en $f(x_{i-1})$, y el supremo de f en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$ se alcanza en $f(x_i)$. Luego, se obtiene que

$$f_-(x) = f(x_{i-1}) = e^{(i-1)/n} \quad \text{y} \quad f_+(x) = f(x_i) = e^{i/n}$$

para cada $x \in (x_{i-1}, x_i)$ y cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(1,0 pto. Por definir las funciones f_- y f_+.)

Por otro lado, como la partición P_n es equiespaciada, se tiene que $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_- &= \sum_{i=1}^{n} e^{(i-1)/n} \Delta x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{(i-1)/n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{i/n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (e^{1/n})^i \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{(e^{1/n})^{n-1+1} - 1}{e^{1/n} - 1} \right) = (e-1) \cdot \left(\frac{1/n}{e^{1/n} - 1} \right).\end{aligned}$$

(1,0 pto. Por calcular la integral de f_-.)

Similarmente,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_+ &= \sum_{i=1}^{n} e^{i/n} \Delta x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{i/n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (e^{1/n})^i \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{(e^{1/n})^{n+1} - e^{1/n}}{e^{1/n} - 1} \right) = (e-1) \cdot e^{1/n} \cdot \left(\frac{1/n}{e^{1/n} - 1} \right).\end{aligned}$$

(1,0 pto. Por calcular la integral de f_+.)

b) **(3,0 pts.)** Justifique que f es Riemann integrable en $[0,1]$ y pruebe que $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$. Use los resultados previos para calcular la integral $\displaystyle\int_0^1 f$.

Solución

La función f es Riemann integrable en $[0,1]$ por ser continua.

(0,5 pts. Por probar que es integrable.)

Se tiene que

$$f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x) \quad \text{para todo } x \in [0,1] \tag{1}$$

ya que f_- y f_+ toman los menores y mayores valores, respectivamente, de f en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$.

(0,5 pts. Por probar que $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$.)

Por definición de la integral de Riemann, se concluye entonces que

$$\int_0^1 f_- \leq \int_0^1 f \leq \int_0^1 f_+. \tag{2}$$

Ahora, la parte a) junto a (2) muestran que

$$(e-1)\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right)\leq\int_0^1 f\leq(e-1)\cdot e^{1/n}\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right). \tag{3}$$

(0,5 pts. Por calcular las cotas de la integral.)

Finalmente, se observa que, del límite conocido

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1}=1,$$

se tiene,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{e^{1/n}-1}=1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}(e-1)\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right)=e-1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}(e-1)\cdot e^{1/n}\cdot\left(\frac{1/n}{e^{1/n}-1}\right)=(e-1)\cdot e^0\cdot 1=e-1.$$

(1,0 pto. Por calcular los límites.)

Junto a (3), resulta que

$$\int_0^1 f=e-1.$$

(0,5 pts. Por concluir.)

P3. a) **(3,0 pts.)** Calcule el área comprendida entre las curvas $y=\operatorname{sen}(x)$ e $y=\cos(x)$ cuando $x\in[0,\pi]$.

Solución

Notamos que el único punto donde $\operatorname{sen}(x)=\cos(x)$ en el intervalo $[0,\pi]$ es el punto $x=\frac{\pi}{4}$. Notar que,

$$\operatorname{sen}(x)\leq\cos(x),\quad \text{si}\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],$$

$$\cos(x)\leq\operatorname{sen}(x),\quad \text{si}\quad x\in\left[\frac{\pi}{4},\pi\right].$$

(1,0 pto. Por determinar el comportamiento de las gráficas de las funciones.)

Luego, el área pedida es

$$\begin{aligned}
A&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\operatorname{sen}(x)-\cos(x)\,dx\\
&=(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos(x)-\operatorname{sen}(x))\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\\
&=\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)-(\operatorname{sen}(0)+\cos(0))-\left(\operatorname{sen}(\pi)+\cos(\pi)-\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)\\
&=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(0+1)-\left(0+(-1)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\\
&=2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

(2,0 pts. Por calcular el área.)

b) **(3,0 pts.)** Calcule el área de la región del plano delimitada por las curvas $y=e^x$, $y=e^{-x}$ y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

Solución

Notemos que en el intervalo $[-1,1]$, el único punto donde $e^x=e^{-x}$ es $x=0$. Además:

$$e^x \leq e^{-x}, \quad \text{si} \quad x \in (-1, 0),$$
$$e^{-x} \leq e^x, \quad \text{si} \quad x \in (0, 1).$$

(1.0 pts. Por determinar el comportamiento de las gráficas de las funciones.)

Por lo tanto, podemos expresar el área como:

$$A = \int_{-1}^{0} (e^{-x} - e^x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (e^x - e^{-x})\ \mathrm{d}x.$$

(0.5 pts. Por definir correctamente el área.)

Calculando cada integral por separado, obtenemos:

$$\int_{-1}^{0} (e^{-x} - e^x)\ \mathrm{d}x = \left[-e^{-x} - e^x\right]_{-1}^{0} = -1 - 1 + e^{-1} + e = e + e^{-1} - 2.$$

$$\int_{0}^{1} (e^x - e^{-x})\ \mathrm{d}x = \left[e^x + e^{-x}\right]_{0}^{1} = e + e^{-1} - (1 + 1) = e + e^{-1} - 2.$$

(1.0 pts. Por calcular correctamente las integrales.)

Finalmente, el área buscada es:

$$A = e + e^{-1} + e + e^{-1} - 4 = 2(e + e^{-1} - 2).$$

(0.5 pts. Por concluir adecuadamente.)