Pauta de corrección Control 2

P1. *a)* Demuestre que entre todos los rectángulos con diagonal dada $d = 1$, el que tiene mayor área, es el cuadrado.

Solución

Considerar un rectángulo de lados x e y, y diagonal $d = 1$. Se tiene la relación

$$x^2 + y^2 = 1.$$

(0,5 pts. Por dar la relación de los lados del rectángulo.)

El área del rectángulo está dada por xy, y usando la relación anterior la podemos expresar como

$$A(x) = x\sqrt{1 - x^2}.$$

(0,5 pts. Por dar la relación de área.)

Notamos que x es la longitud de un lado del rectángulo, por lo que debe ser positiva, y así obtenemos que $x \in [0, 1]$. Luego, los candidatos a máximo son $x = 0$, $x = 1$ o los puntos donde $A'(x) = 0$. Calculamos la derivada:

$$A'(x) = \sqrt{1 - x^2} + x\frac{(-2x)}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Luego

$$A'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Luego, los candidatos a máximo son

$$\begin{aligned} A(0) &= 0 \\ A(1) &= 0 \\ A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(1,0 pto. Por dar los puntos críticos y evaluar la función.)

Por lo tanto, $x = 1/\sqrt{2}$ maximiza $A(x)$. Calculando el valor correspondiente de y notamos que

$$y = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Luego $x = y = 1/\sqrt{2}$ y la figura obtenida es un cuadrado.

(1,0 pto. Por deducir que debe ser un cuadrado.)

b) Considere la función

$$f(x) = \operatorname{sen}(x^2).$$

Calcule un polinomio de Taylor T_f de orden 3 para f centrado en $\bar{x} = 0$. Pruebe que existe $\xi \in (0, x)$ tal que

$$f(x) = T_f(x) + \frac{f^{[3]}(\xi)x^3}{3!}.$$

Solución

Calculamos las tres primeras derivadas de la función.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\cos(x^2) \\ f''(x) &= 2\cos(x^2) - 2x\operatorname{sen}(x^2)\cdot(2x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\operatorname{sen}(x^2) \end{aligned}$$

$$f'''(x) = -2\,\mathrm{sen}(x^2)\cdot(2x) - 4(2x\,\mathrm{sen}(x^2) + x^2\cos(x^2)\cdot(2x)) = -12x\,\mathrm{sen}(x^2) - 8x^3\cos(x^2).$$

(1,0 pto. Por dar los valores de las derivadas.)

Notar que

$$f(0) = f'(0) = f'''(0) = 0,$$

y $f''(0) = 2$. Así, el polinomio de Taylor de orden 3 es simplemente

$$T_f(x) = \frac{f''(0)x^2}{2!} = x^2.$$

(1,0 pto. Por dar el polinomio de Taylor.)

Notar que como la tercera derivada se anula, el polinomio de Taylor de orden 3 coincide con el polinomio de orden 2. Así, la fórmula de Taylor nos dice que existe $\xi \in (0, x)$ tal que

$$f(x) = x^2 + \frac{f^{[3]}(\xi)x^3}{3!}.$$

(1,0 pto. Por concluir la fórmula.)

P2. Encuentre una fórmula recursiva para la integral

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

Para eso,

a) Calcule I_1.

Solución

Notar que

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan(x) + C.$$

(1,5 pts. Por calcular la integral.)

b) Muestre que

$$I_n = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx$$

Solución

Se tiene que

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx \\
&= \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^n}\,dx \\
&= \int \frac{1+x^2}{(x^2+1)^n}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx \\
&= \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx \\
&= I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx
\end{aligned}$$

(1,5 pts. Por concluir la fórmula.)

c) Considere $n > 1$ y calcule la integral

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx$$

Solución

Sea el cambio de variable

$$u = 1 + x^2, \quad du = 2x\,dx.$$

(0,5 pts. Por dar el cambio de variables.)

Así,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^n}\,du \\ &= \frac{1}{2}\frac{u^{-n+1}}{(-n+1)} \\ &= \frac{1}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}} + C.\end{aligned}$$

(1,0 pto. Por calcular la integral.)

d) Demuestre que

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

Hint: Use la parte b) e integre por partes la correspondiente integral.

Solución

De la parte b) sabemos que

$$I_n = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx.$$

Desarrollamos la integral. Para esto, integramos por partes, considerando

$$u = x,\ dv = \frac{x}{(x^2+1)^n} \Longrightarrow du = dx,\ v = \frac{1}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}}.$$

(0,5 pts. Por proponer la integración por partes.)

Notar que la expresión para v viene dada por la parte c). Así,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx &= \frac{x}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} \\ &= \frac{x}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}.\end{aligned}$$

(0,5 pts. Por calcular la integral.)

Así, obtenemos que

$$\begin{aligned}I_n &= I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx \\ &= I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \\ &= \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}.\end{aligned}$$

(0,5 pts. Por concluir.)

P3. Resuelva dos de las siguientes primitivas

a) $\displaystyle\int e^x \cdot \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx$

Solución

Hacemos el cambio de variable

$$u = e^x + 1 \Longrightarrow du = e^x dx.$$

(0,5 pts. Por proponer el cambio de variables.)

Así,

$$\begin{aligned}\int e^x \cdot \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx &= \int \frac{u-2}{u}\, du \\ &= \int \left(1 - \frac{2}{u}\right) du \\ &= u - 2\ln(u) + C \\ &= e^x + 1 - 2\ln(e^x + 1) + C\end{aligned}$$

(1,0 pto. Por calcular la integral.)

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4(x)\cos^3(x)\, dx$

Solución

Hacemos el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen}(x) \Longrightarrow du = \cos(x).$$

(0,5 pts. Por proponer el cambio de variables.)

Notar que

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4(x)\cos^3(x)\, dx &= \int \operatorname{sen}^4(x)(1 - \operatorname{sen}^2(x))\cos(x)\, dx \\ &= \int u^4(1-u^2)\, du \\ &= \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C \\ &= \frac{\operatorname{sen}^5(x)}{5} - \frac{\operatorname{sen}^7(x)}{7} + C\end{aligned}$$

(1,0 pto. Por calcular la integral.)

c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x+1)}\, dx$

Solución

Se comienza por separar la expresión $\dfrac{1}{(x-3)(x+1)}$ en fracciones parciales. Para ello, se buscan constantes $A, B \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

Usando las identidades

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{(A+B)x + (A-3B)}{(x-3)(x+1)}$$

(0,5 pts. Por proponer las fracciones parciales.)

resulta la igualdad de polinomios

$$(A+B)x + (A-3B) = 1$$

que implica que

$$\begin{aligned}A + B &= 0 \\ A - 3B &= 1.\end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones se puede resolver por varios métodos. Por ejemplo, sumando tres veces la primera ecuación con la segunda resulta en $4A = 1$, de donde queda que $A = \frac{1}{4}$ y que $B = -\frac{1}{4}$.

(0,5 pts. Por calcular las constantes.)

Alternativa

También es posible escribir la igualdad de polinomios como

$$A(x+1)+B(x-3)=1$$

y evaluar en $x=-1$ y $x=3$ para obtener las ecuaciones $-4B=1$ y $4A=1$, respectivamente, las que inmediatamente muestran que $A=\frac{1}{4}$ y que $B=-\frac{1}{4}$.

(0,5 pts. Por calcular las constantes.)

Por lo tanto,

$$\int \frac{1}{(x-3)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|x-3| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C.$$

(0,5 pts. Por calcular la integral.)