Pauta de corrección Control 1

P1. Considere la función

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Esta función es conocida como la *tangente hiperbólica*.

a) **(1,5 pts.)** Verifique que la función es continua en todo $\mathbb{R}$, que $f(0) = 0$ y que para todo $x \in \mathbb{R}$, se satisface

$$-1 < f(x) < 1.$$

Solución

La función $\exp(x)$ es continua, visto en clases, y la exponencial negativa $\exp(-x)$ es continua por ser una composición de funciones continuas. Luego, tanto el numerador como el denominador son funciones continuas, por ser suma y resta de funciones continuas. Como la función exponencial es siempre positiva, $e^x + e^{-x} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que el denominador nunca se anula y f es un cuociente de funciones continuas, por lo tanto, es continua.

(0,5 pts. Por indicar que la función es continua.)

Notar que

$$f(0) = \frac{e^0 - e^0}{e^0 + e^0} = \frac{1-1}{1+1} = 0.$$

(0,2 pts. Por indicar que $f(0) = 0$.)

Como la función exponencial es siempre positiva, se tiene que

$$-e^{-x} < 0 < e^{-x} \implies e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x} \implies f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1.$$

Notar que la división por $e^x + e^{-x}$ es posible ya que esta expresión es siempre positiva, como se argumentó anteriormente.

(0,4 pts. Por indicar que $f(x) < 1$.)

Por otro lado,

$$-e^{-x} < 0 < e^{-x} \implies -e^x - e^{-x} < -e^x + e^{-x} \implies -(e^x + e^{-x}) < -e^x + e^{-x} \implies -1 < \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = f(x).$$

La división por el término $e^x + e^{-x}$ no cambia el sentido de la desigualdad pues esta expresión es positiva, como se argumentó previamente.

(0,4 pts. Por indicar que Por indicar que la $-1 < f(x)$.)

b) **(1,5 pts.)** Calcule $f'(x)$ y úsela para estudiar la monotonía de la función.

Solución

Usamos la regla del cuociente para obtener

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.
\end{aligned}$$

(1,0 pto. Por calcular la derivada.)

La expresión obtenida es positiva para todo $x \in \mathbb{R}$, lo cual implica que f es una función estrictamente creciente.

(0,5 pts. Por concluir que es creciente.)

c) **(1,5 pts.)** Pruebe que si $n \to \infty$ entonces $f(n) \to 1$ y $f(-n) \to -1$.

Solución

Sabemos que e^x tiende a $+\infty$ cuando $x \to \infty$.

(0,3 pts. Por indicar el límite de e^x.)

Usando esto, tenemos que

$$f(n) = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \cdot \frac{e^{-n}}{e^{-n}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{2n}}}{1 + \frac{1}{e^{2n}}}.$$

Como $e^{-2n} \to 0$, se obtiene que $f(n) \to 1$.

(0,6 pts. Por calcular el límite.)

Por otro lado,

$$f(-n) = \frac{e^{-n} - e^{n}}{e^{-n} + e^{n}} \cdot \frac{e^{-n}}{e^{-n}} = \frac{\frac{1}{e^{2n}} - 1}{\frac{1}{e^{2n}} + 1}.$$

Usando el mismo argumento, obtenemos que $f(-n) \to -1$.

(0,6 pts. Por calcular el límite.)

d) **(1,5 pts.)** Usando el Teorema del Valor Intermedio, demuestre que, para todo $\alpha \in [0, 1)$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha$.

Indicación: Estudie por separado los casos $\alpha = 0$ y $\alpha \in (0, 1)$. Para el caso $\alpha \in (0, 1)$, considere $\alpha = 1 - \varepsilon$ y use la definición de límites, considerando el resultado anterior.

Solución

Por la parte a), si $\alpha = 0$ sabemos que $f(0) = 0$.

(0,5 pts. Por estudiar el caso $\alpha = 0$.)

Siguiendo la indicación, escribimos $\alpha = 1 - \varepsilon$, con $\varepsilon \in (0, 1)$. Usamos la parte c), y por definición de límite, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$,

$$|f(n) - 1| < \varepsilon.$$

f es una función estrictamente creciente, cuyo límite es 1, por lo que $f(n) < 1$. Es decir,

$$f(n) > 1 - \varepsilon = \alpha,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $N > n_0$, y obtenemos que $f(N) > \alpha$.

(0,5 pts. Por usar la definición de límites.)

De aquí, tenemos dos opciones:

Usando el TVI

definamos una función auxiliar $g(x) = f(x) - \alpha$, que es continua. Notamos que $g(N) = f(N) - \alpha > 0$, y $g(0) = -\alpha < 0$. Luego $g(N)g(0) < 0$, y por el Teorema del valor intermedio, existe $\bar{x} \in (0, N)$ tal que $g(\bar{x}) = 0$, es decir, $f(\bar{x}) = \alpha$.

(0,5 pts. Por concluir.)

Usando el TVI en su forma general

como $\alpha \in (0, f(N))$, el Teorema del Valor Intermedio en su forma general nos garantiza que existe $\bar{x} \in (0, N)$ tal que $f(\bar{x}) = \alpha$. **(0,5 pts. Por concluir.)**

P2. Considere la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

(3,0 pts.) Calcule $f'(x)$ y calcule los puntos donde $f'(x) = 0$. Estudie la monotonía de la función y argumente si ésta tiene máximos y/o mínimos.

Solución

Usando la regla del cuociente, se obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

(0,7 pts. Por calcular la derivada)

Luego, el signo y los ceros vienen dados por el numerador $1 - x^2$, ya que el denominador es siempre positivo. Esta expresión se anula en $x = 1$ y en $x = -1$. Notamos que la expresión es negativa si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, y es positiva si $x \in (-1, 1)$. Luego:

- a) La función es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
- La función es creciente en $(-1, 1)$.

(1,5 pts. Por estudiar la monotonía.)

Como la función es decreciente en $(-\infty, -1)$, y luego es creciente en $(-1, 1)$, $x = -1$ es un mínimo. Del mismo modo, como la función es creciente en $(-1, 1)$ y luego decreciente en $(1, \infty)$, $x = 1$ es un máximo.

(0,8 pts. Por argumentar lo de máximo y mínimo.)

b) **(3,0 pts.)** Calcule $f''(x)$ y úsela para estudiar la convexidad y/o concavidad de la función.

Solución

Usando la regla del cuociente, tenemos que

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right)' \\ &= \frac{(1-x^2)'(x^2+1)^2 - (1-x^2)((x^2+1)^2)'}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)\cdot 2(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-2x((x^2+1)^2 + 2(1-x^4))}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{2x(x^4-2x^2-3)}{(x^2+1)^4}. \end{aligned}$$

(1,5 pts. Por calcular f''.)

Notamos que el signo está dado por la expresión del numerador. Haciendo $z = x^2$, estudiamos la expresión

$$z^2 - 2z - 3 = (z-3)(z+1).$$

(0,5 pts. Por proponer las raíces.)

Esto nos indica que el numerador se anula cuando $x^2 = 3$ o cuando $x^2 = -1$. La última expresión no tiene soluciones reales, por lo que analizaremos el signo del numerador en los siguientes intervalos:

$$(-\infty, -\sqrt{3}),\ (-\sqrt{3}, 0), (0, \sqrt{3}),\ (\sqrt{3}, \infty).$$

Por lo tanto, se tiene:

- Para $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$, el numerador es negativo, por lo que f es cóncava.
- Para $x \in (-\sqrt{3}, 0)$, el numerador es positivo, por lo que f es convexa.

- Para $x \in (0, \sqrt{3})$, el numerador es negativo, por lo que f es cóncava.
- Para $x \in (\sqrt{3}), +\infty$, el numerador es positivo, por lo que f es convexa.

(1,0 pto. Por concluir.)

P3. a) **(3,0 pts.)** Decimos que una función f tiene un *punto fijo* si existe $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Demuestre que f tiene un punto fijo en $[0,1]$.

Solución

Definimos la función auxiliar $g(x) = f(x) - x$ para $x \in [0,1]$. Como f es continua en $[0,1]$, se sigue que g también es continua.

(1,0 pto. Por definir la función auxiliar y decir que es continua.)

Ahora evaluemos $g(x)$ en los extremos del intervalo:

- En $x = 0$:
$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0,$$
ya que $f(x) \in [0,1]$.
- En $x = 1$:
$$g(1) = f(1) - 1 \leq 0,$$
ya que $f(x) \in [0,1]$.

Por lo tanto, $g(0) \geq 0$ y $g(1) \leq 0$.

(1,0 pto. Por evaluar en los extremos.)

Como $g(x)$ es continua en $[0,1]$, por el **teorema del valor intermedio**, existe un punto $\overline{x} \in [0,1]$ tal que:
$$g(\overline{x}) = 0.$$

Esto implica que:
$$f(\overline{x}) - \overline{x} = 0 \quad \text{es decir,} \quad f(\overline{x}) = \overline{x}.$$

En consecuencia, f tiene un punto fijo en $[0,1]$.

(1,0 pto. Por usar TVI y concluir.)

b) **(3,0 pts.)** Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función derivable y suponga que tiene al menos, dos raíces. Pruebe que f' tiene al menos una raíz.

Solución

Sean $x,\ y \in (a,b)$ con $x \neq y$ tales que $f(x) = f(y) = 0$. Como $[x,y] \subset (a,b)$, la función es continua en $[x,y]$ (pues f es derivable en (a,b) y luego continua en dicho intervalo), y derivable en (x,y).

(1,5 pts. Por dar la hipótesis del TVM.)

Luego, por el Teorema del Valor Medio, existe $z \in (x,y)$ tal que
$$f'(z) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0.$$

Luego z es una raíz de f.

(1,5 pts. Por concluir)