Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1002: Cálculo Diferencial e Integral. 2024-V

Control 1

P1. Considere la función

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Esta función es conocida como la *tangente hiperbólica.*

a) **(1,5 pts.)** Verifique que la función es continua en todo $\mathbb{R}$, que $f(0) = 0$ y que para todo $x \in \mathbb{R}$, se satisface

$$-1 < f(x) < 1.$$

b) **(1,5 pts.)** Calcule $f'(x)$ y úsela para estudiar la monotonía de la función.

c) **(1,5 pts.)** Pruebe que si $n \to \infty$ entonces $f(n) \to 1$ y $f(-n) \to -1$.

d) **(1,5 pts.)** Usando el Teorema del Valor Intermedio, demuestre que, para todo $\alpha \in [0, 1)$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha$.
Indicación: Estudie por separado los casos $\alpha = 0$ y $\alpha \in (0, 1)$. Para el caso $\alpha \in (0, 1)$, considere $\alpha = 1 - \varepsilon$ y use la definición de límites, considerando el resultado anterior.

P2. Considere la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

(3,0 pts.) Calcule $f'(x)$ y calcule los puntos donde $f'(x) = 0$. Estudie la monotonía de la función y argumente si ésta tiene máximos y/o mínimos.

b) **(3,0 pts.)** Calcule $f''(x)$ y úsela para estudiar la convexidad y/o concavidad de la función.

P3. a) **(3,0 pts.)** Decimos que una función f tiene un *punto fijo* si existe $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Demuestre que f tiene un punto fijo en $[0, 1]$.

b) **(3,0 pts.)** Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función derivable y suponga que tiene al menos, dos raíces. Pruebe que f' tiene al menos una raíz.

Si usa un teorema, no olvide verificar explícitamente cada una de sus hipótesis.

Duración: 3h.