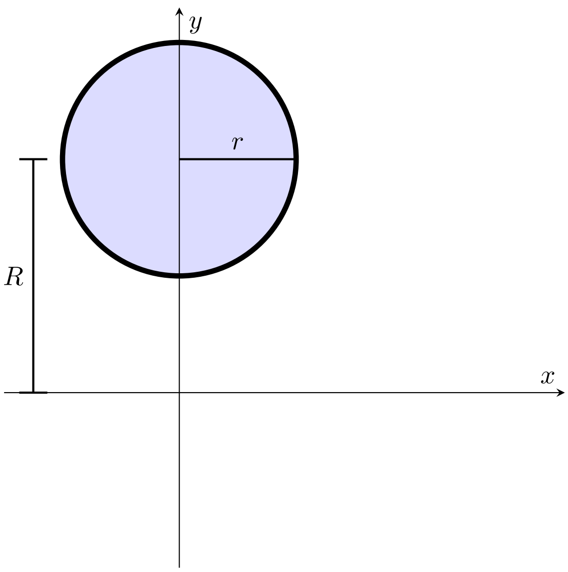
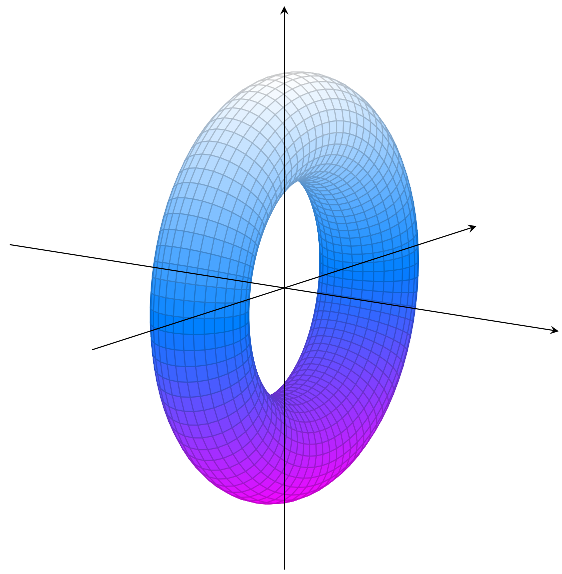
Control 3

P1. Sean $r > 0$ y $R > r$ fijos. Considere el sólido de revolución C generado por la rotación de la circunferencia de ecuación $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ en torno al eje horizontal, como muestra la Figura 1.



(a) Circunferencia $x^2 + (y - R)^2 = r^2$.



(b) Sólido C.

Figura 1

a) **(3,0 pts.)** Calcule el volumen de C.

b) **(3,0 pts.)** Calcule la superficie del manto de C.

P2. a) i) **(1,5 pts.)** Considere una función $f\colon [0,\infty) \to [0,1]$ tal que la integral $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente. Sea además $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función acotada. Demuestre que la integral $\displaystyle\int_0^\infty g(x)\cdot\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$ es convergente.

ii) **(1,5 pts.)** Determine si la integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}\ln\big(1+\cos^2(x)\big)\,\mathrm{d}x$ es convergente.

b) **(3,0 pts.)** Determine si la integral $\displaystyle\int_{0^+}^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ es convergente.

P3. a) **(3,0 pts.)** Determine para qué valores de $r > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2k-3}{k^{3r/2}}\right)^k$ es convergente.

b) El objetivo de este problema es demostrar que $\dfrac{10}{e^2} \leq \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{e^k} \leq \frac{14}{e^2}$. Para esto, considere la función $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ dada por $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$ y siga el siguiente esquema:

i) **(1,5 pts.)** Demuestre que, para todo natural $n \geq 2$, se tiene que

$$\sum_{k=3}^{n+1} f(k) \leq \int_2^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n} f(k).$$

Concluya que

$$\int_2^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_2^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x + f(2) - f(n+1).$$

ii) **(1,0 pto.)** Muestre que $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{10}{e^2}$.

iii) **(0,5 pts.)** Concluya usando las partes anteriores.

Formulario	Área de la región entre la curva definida por f y el eje horizontal ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable)	$\displaystyle\int_a^b \lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x$
	Volumen de un sólido de área transversal A ($A\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable)	$\displaystyle\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$
	Volumen del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje horizontal ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa e integrable)	$\displaystyle\pi\int_a^b \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$
	Volumen del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje vertical ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable, con $a \geq 0$)	$\displaystyle 2\pi\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$
	Longitud del arco de curva definido por f ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase C^1)	$\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x$
	Superficie del manto del sólido de revolución obtenido rotando la región entre la curva definida por f y el eje horizontal, en torno al eje horizontal ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa y de clase C^1)	$\displaystyle 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x$
	Área de la región encerrada por la curva definida en coordenadas polares por $r = f(\phi)$ ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ no negativa, integrable, con $b-a \leq 2\pi$)	$\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b \big(f(\phi)\big)^2\,\mathrm{d}\phi$

Si usa un teorema, no olvide verificar explícitamente cada una de sus hipótesis.

Duración: 3h.