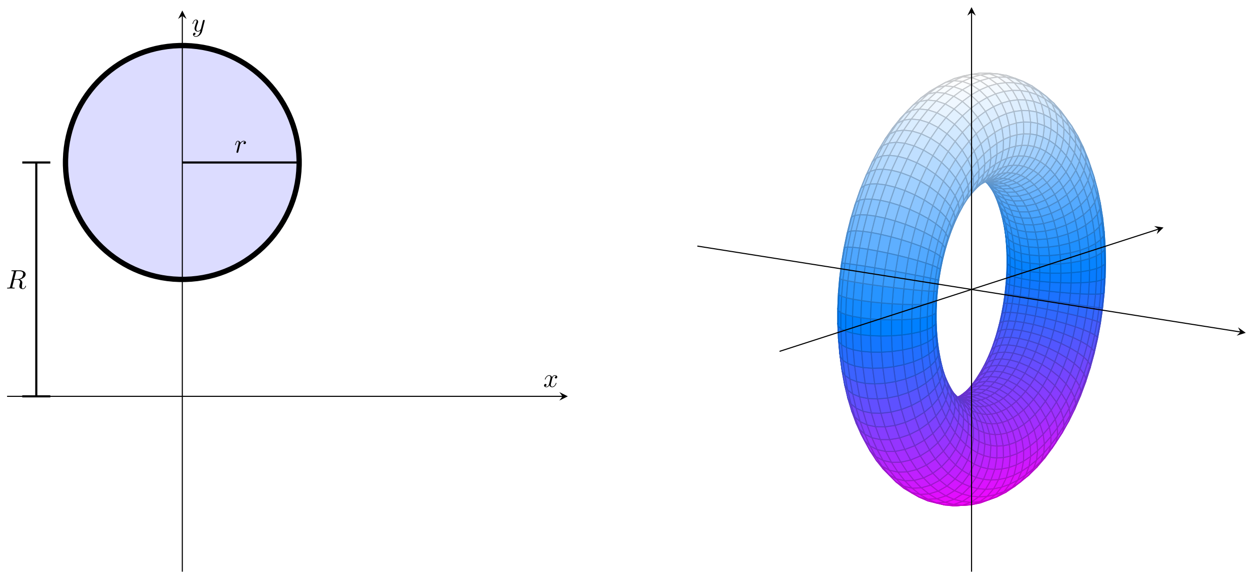
Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1002: Cálculo Diferencial e Integral. 2024-2

# Pauta de corrección Control 3

**P1.** Sean $r > 0$ y $R > r$ fijos. Considere el sólido de revolución $C$ generado por la rotación de la circunferencia de ecuación $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ en torno al eje horizontal, como muestra la Figura 1.




(a) Circunferencia $x^2 + (y - R)^2 = r^2$.

(b) Sólido $C$.

Figura 1

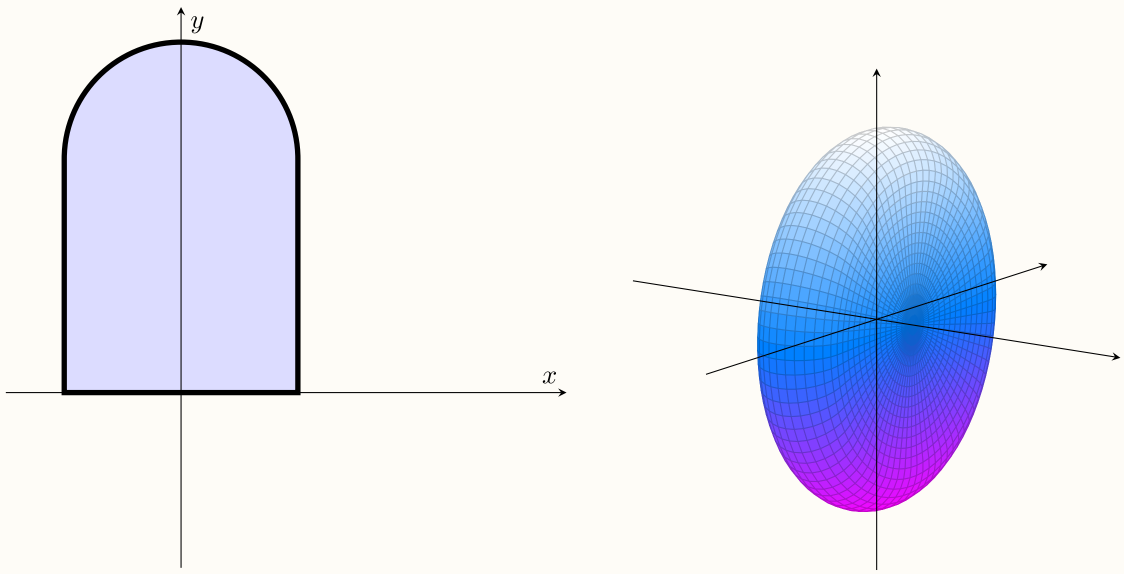
a) **(3,0 pts.)** Calcule el volumen de $C$.

**Solución**

Se comienza despejando $y$ en la ecuación $x^2 + (y - R)^2 = r^2$. Se tiene que

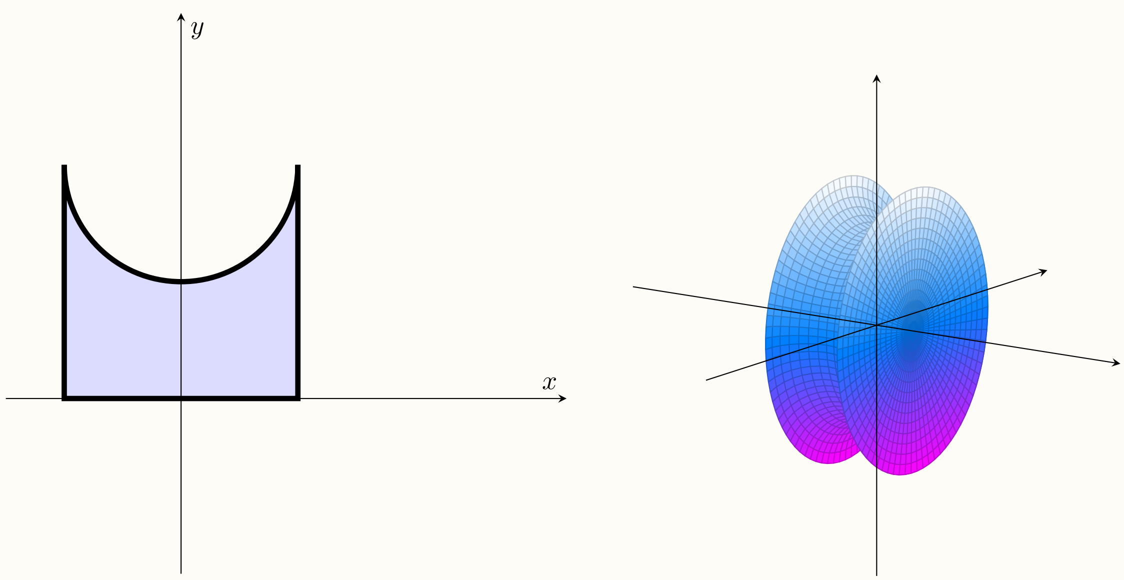
$$x^2 + (y - R)^2 = r^2 \iff (y - R)^2 = r^2 - x^2 \iff y - R = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \iff y = R \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Se definen entonces las funciones $f\colon [-r, r] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ y $g\colon [-r, r] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$. **(0,5 pts. por plantear las funciones a rotar en torno al eje.)**
Al girar, el área bajo $f$ genera el el volumen que contiene a $C$ rellenando hasta el eje horizontal, como muestra la Figura 2. Por otro lado, al girar, el área bajo $g$ genera el el volumen "sobrante", que se debe restar para encontrar el volumen de $C$, como muestra la Figura 3.




(a) Área bajo $f$. (b) Volumen “exterior”.

Figura 2




(a) Área bajo $g$. (b) Volumen “interior”.

Figura 3

De este modo, se deduce que

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \big(f(x)\big)^2 \, \mathrm{d}x - \pi \int_{-r}^{r} \big(g(x)\big)^2 \, \mathrm{d}x.$$

**(1,0 pto. por plantear volumen como diferencia de integrales.)**

Se tiene que:

$$\big(f(x)\big)^2 = (R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 = R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2.$$

Similarmente,

$$\big(g(x)\big)^2 = (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2 = R^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2.$$

**(0,3 pts. por calcular estas expresiones.)**

De este modo, resulta que

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2) \, \mathrm{d}x - \pi \int_{-r}^{r} (R^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2) \, \mathrm{d}x$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} (R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 - (R^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2))\, \mathrm{d}x$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} 4R\sqrt{r^2 - x^2}\, \mathrm{d}x = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, \mathrm{d}x$$

**(0,6 pts. por simplificar y obtener este resultado.)**

$$= 4\pi R \cdot \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 R r^2,$$

**(0,6 pts. por calcular la integral.)**

ya que la integral $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, \mathrm{d}x$ corresponde al área de un semicírculo de radio $r$.

**Indicaciones de corrección**

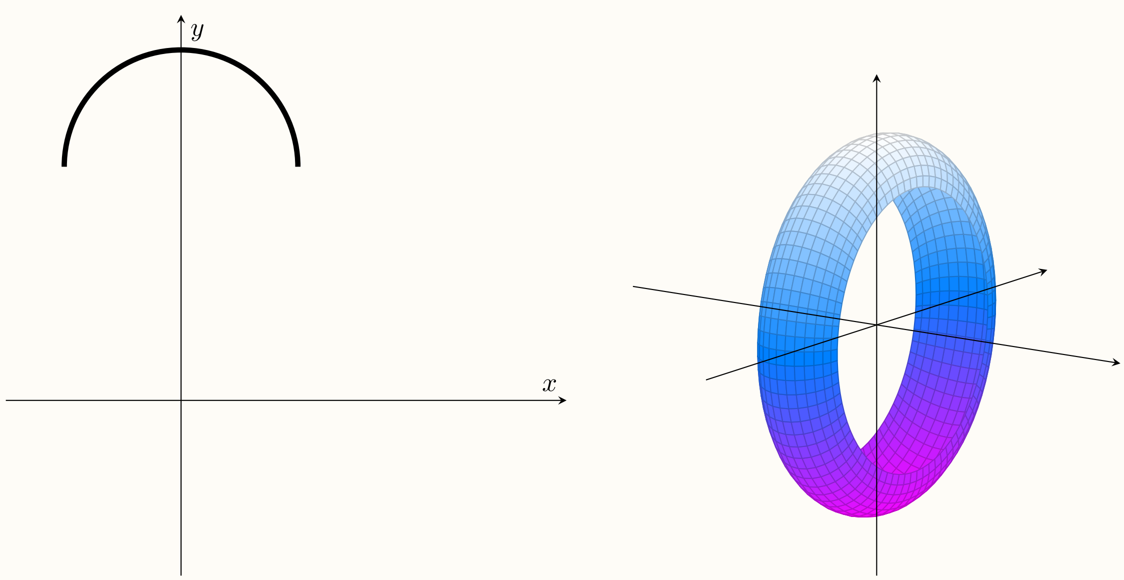
- No es necesario definir explícitamente las funciones $f$ y $g$; basta con escribir las integrales directamente. En la pauta se escribe de esta forma solo para poder explicar con más detalle lo que se está haciendo.
- Técnicamente, la integral $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}$ se puede calcular usando distintos métodos, pero no es necesario argumentarla de esa forma.
- También se puede argumentar que por simetría es suficiente calcular el volumen con integrales entre 0 y $r$ (multiplicando por 2 al final).
- No es necesario hacer un planteamiento del cálculo del volumen haciendo bosquejos como en la pauta. Lo importante es realizar el planteamiento como diferencia de integrales.

b) **(3,0 pts.)** Calcule la superficie del manto de $C$.

**Solución**

Igual que en la parte anterior, se tiene que $y = R \pm \sqrt{r^2 - x^2}$. Se usan las mismas funciones de la parte anterior: $f\colon [-r, r] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ que, al girar, genera la superficie "exterior" del manto de $C$, como muestra la Figura 4, y $g\colon [-r, r] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ que, al girar, genera la superficie "interior" del manto de $C$, como muestra la Figura 5.

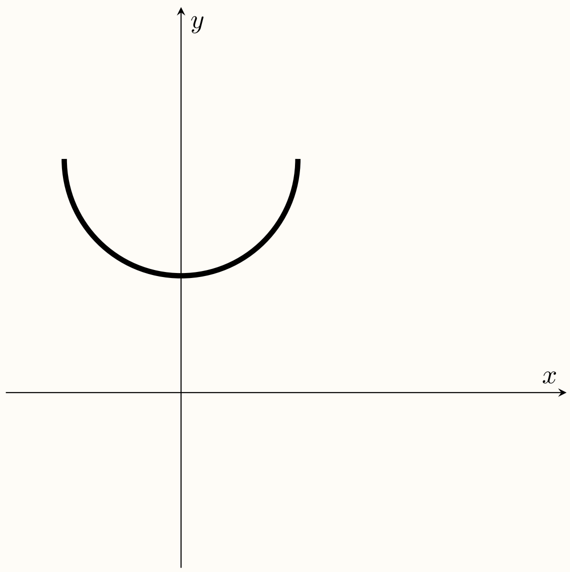
**(0,5 pts. por plantear las funciones a rotar en torno al eje.)**



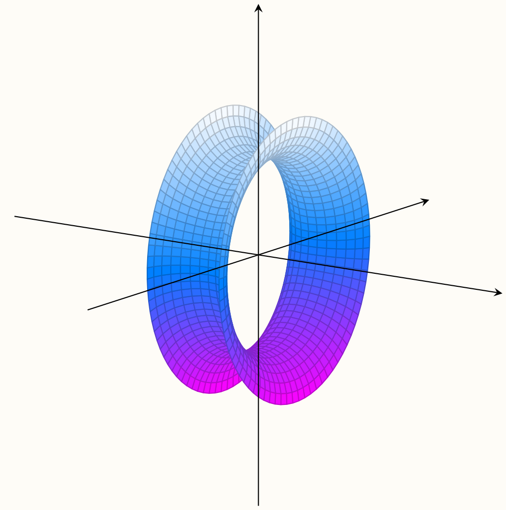

(a) Curva $f$.

(b) Superficie "exterior".

Figura 4




(a) Curva $g$.



(b) Superficie "interior".

Figura 5

Por lo tanto, la superficie buscada es

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} f(x)\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x + 2\pi \int_{-r}^{r} g(x)\sqrt{1+\big(g'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x.$$

**(1,0 pto. por plantear volumen como suma de integrales.)**

Se tiene que:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} \implies \big(f'(x)\big)^2 = \frac{x^2}{r^2-x^2} \implies 1+\big(f'(x)\big)^2 = \frac{r^2}{r^2-x^2} \implies \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

de donde

$$f(x)\sqrt{1+\big(f(x)\big)^2} = \frac{Rr}{\sqrt{r^2-x^2}} + r.$$

Similarmente,

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} \implies \big(g'(x)\big)^2 = \frac{x^2}{r^2-x^2} \implies 1+\big(g'(x)\big)^2 = \frac{r^2}{r^2-x^2} \implies \sqrt{1+\big(g'(x)\big)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

de donde

$$g(x)\sqrt{1+\big(g(x)\big)^2} = \frac{Rr}{\sqrt{r^2-x^2}} - r.$$

**(0,3 pts. por calcular estas expresiones.)**

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-r}^{r} \left(\frac{Rr}{\sqrt{r^2-x^2}} + r\right)\mathrm{d}x + 2\pi \int_{-r}^{r} \left(\frac{Rr}{\sqrt{r^2-x^2}} - r\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_{-r}^{r} \left(\frac{Rr}{\sqrt{r^2-x^2}} + r + \frac{Rr}{\sqrt{r^2-x^2}} - r\right)\mathrm{d}x = 4\pi Rr \int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}} \end{aligned}$$

**(0,6 pts. por simplificar y obtener este resultado.)**

$$= 4\pi Rr \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{r}\right)\Big|_{-r}^{r} = 4\pi Rr(\operatorname{arc\,sen}(1) - \operatorname{arc\,sen}(-1)) = 4\pi Rr\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 4\pi^2 Rr.$$

**(0,6 pts. por calcular la integral.)**

**Indicaciones de corrección**

- Nuevamente, no es necesario definir explícitamente las funciones $f$ y $g$; basta con escribir las integrales directamente. En la pauta se escribe de esta forma solo para poder explicar con más detalle lo que se está haciendo.
- Técnicamente, la integral $\displaystyle\int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}$ es una integral impropia de segunda especie, pero no es necesario tratarla como tal porque la primitiva $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{r}\right) + C$ es continua también en $x = (-r)^+$ y $x = r^-$.

  Más precisamente, se podría tratar más rigurosamente como:

$$
\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int_{-r}^{0} \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{x\to(-r)^+} \int_{x}^{0} \frac{1}{\sqrt{r^2-t^2}}\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to r^-} \int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{r^2-t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{x\to(-r)^+} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{t}{r}\right)\Bigg|_{x}^{0} + \lim_{x\to r^-} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{t}{r}\right)\Bigg|_{0}^{x} \\
&= \lim_{x\to(-r)^+} \left(\operatorname{arc\,sen}(0) - \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{r}\right)\right) + \lim_{x\to r^-} \left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{r}\right) - \operatorname{arc\,sen}(0)\right) \\
&= \operatorname{arc\,sen}(0) - \operatorname{arc\,sen}(-1) + \operatorname{arc\,sen}(1) - \operatorname{arc\,sen}(0) \\
&= \operatorname{arc\,sen}(1) - \operatorname{arc\,sen}(-1) = \pi,
\end{aligned}
$$

  donde se usó la continuidad por la derecha de $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{r}\right)$ en $x = -r$ y la continuidad por la izquierda de $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{r}\right)$ en $x = r$.
- También se puede argumentar que por simetría es suficiente calcular el volumen con integrales entre 0 y $r$ (multiplicando por 2 al final).
- No es necesario hacer un planteamiento del cálculo de la superficie haciendo bosquejos como en la pauta. Lo importante es realizar el planteamiento como suma de integrales.

**P2.** a) i) **(1,5 pts.)** Considere una función $f\colon [0,\infty) \to [0,1]$ tal que la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente. Sea además $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función acotada. Demuestre que la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} g(x)\cdot\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$ es convergente.

**Solución**

Primero, basta demostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty} \left|g(x)\cdot\big(f(x)\big)^2\right|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} |g(x)|\cdot\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$ es convergente. En efecto, esto establece la convergencia absoluta, lo que implica la convergencia.

**(0,5 pts. por citar correctamente resultado de convergencia absoluta.)**

Como $g$ es acotada, existe $M \geq 0$ tal que $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in [0,\infty)$.

**(0,2 pts. por usar correctamente que $g$ es acotada.)**

Además, como $f(x) \in [0,1]$, se tiene que $0 \leq \big(f(x)\big)^2 \leq f(x)$. De este modo, se deduce que

$$0 \leq |g(x)|\cdot\big(f(x)\big)^2 \leq M\cdot f(x),\ \text{para todo } x \in [0,\infty).$$

**(0,3 pts. por acotar de manera correcta $|g(x)|\cdot\big(f(x)\big)^2$.)**

Luego, por el criterio de mayoración, $\displaystyle\int_0^{\infty} |g(x)|\cdot\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$ es convergente si $\displaystyle\int_0^{\infty} M\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$ lo es. Esto se cumple ya que $M$ es una constante y $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente.

**(0,5 pts. por aplicar criterio de mayoración de manera correcta.)**

**Indicaciones de corrección**

- No es necesario escribir tanto detalle como en la pauta. Lo esencial es argumentar que se usará la convergencia absoluta, más el hecho de que $g$ sea acotada para reducir el problema a la convergencia de $\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$, que es menor que $f(x)\,\mathrm{d}x$.

ii) **(1,5 pts.)** Determine si la integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}\ln\big(1+\cos^2(x)\big)\,\mathrm{d}x$ es convergente.

**Solución**

Se consideran las funciones $f, g\colon [0,\infty)\to\mathbb{R}$ dadas por $f(x)=e^{-x}$ y $g(x)=\ln(1+\cos^2(x))$.

**(0,2 pts. por enunciar las funciones de manera correcta.)**

Se tiene que $f(x)\in[0,1]$ para todo $x\in[0,\infty)$.

**(0,2 pts. por enunciar que $\boldsymbol{f(x)\in[0,1]}$.)**

Además, la integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$ es conocidamente convergente (por ejemplo del criterio de la integral impropia, pues la serie geométrica es convergente).

**(0,2 pts. por enunciar que $\boldsymbol{\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x}$ es convergente.)**

Por otro lado, se tiene que $g$ es acotada, ya que

$$-1\le\cos(x)\le 1\implies 0\le\cos^2(x)\le 1\implies 1\le 1+\cos^2(x)\le 2\implies 0\le\ln(1+\cos^2(x))\le\ln(2),$$

para todo $x\in[0,\infty)$. **(0,5 pts. por mostrar que la función $\boldsymbol{g}$ es acotada.)**

Finalmente, usando la parte anterior, se concluye que $\displaystyle\int_0^\infty g(x)\cdot\big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty e^{-2x}\ln\big(1+\cos^2(x)\big)\,\mathrm{d}x$ es convergente. **(0,4 pts. por aplicar correctamente el resultado anterior.)**

**Indicaciones de corrección**

- No es necesario argumentar que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$ es convergente; basta con mencionarlo.
- Tampoco es necesario argumentar con mucho detalle que $0\le\ln(1+\cos^2(x))\le\ln(2)$; nuevamente basta con mencionarlo.
- También se puede acotar directamente (sin usar la parte anterior). Por ejemplo, haciendo

  $$e^{-2x}\ln(1+\cos^2(x))\le e^{-2x}\ln(2),$$

  y luego usando que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}\,\mathrm{d}x$ es convergente.
- Se puede argumentar de manera independiente que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}\ln\big(1+\cos^2(x)\big)\,\mathrm{d}x$ es convergente sin la necesidad de usar la parte anterior.

b) **(3,0 pts.)** Determine si la integral $\displaystyle\int_{0^+}^\infty\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ es convergente.

**Solución**

Se verá que la integral es convergente. Primero, como la integral es de tercera especie o mixta, se debe separar en varias integrales, cada una de primera o segunda especie. De este modo, se escribe

$$\int_{0^+}^\infty\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{0^+}^1\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x+\int_1^\infty\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Se demostrará ahora separadamente que estas integrales impropias convergen.

**(0,3 pts. por separar la integral en dos integrales impropias.)**

Para la primera integral, se comienza notando que $\operatorname{sen}(x)$ es no negativo para $x\in[0,1]$, por lo cual la función

$\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2}$ también es no negativa en $[0,1]$. **(0,3 pts. por argumentar que la función es no negativa.)**

Se puede continuar usando alguno de los siguientes métodos:

**Primera forma para analizar $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ (Criterio del cociente directamente)**

Se tiene que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x+x^{5/3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}}{1+x^{2/3}} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

donde se usó el límite conocido $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$.

**(0,3 pts. por verificar de manera correcta hipótesis del criterio.)**

Por lo tanto, el criterio del cociente muestra que $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ y $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ tienen el mismo comportamiento.

**(0,3 pts. por aplicar el criterio de manera correcta)**

De lo visto en clases, la última integral es convergente, así que la primera, también.

**(0,4 pts. por usar la convergencia conocida.)**

**Segunda forma para analizar $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ (Criterio del cociente y de mayoración)**

Se tiene que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2}}{\dfrac{x}{x\sqrt[3]{x}+x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1,$$

ya que es un límite conocido.

**(0,2 pts. por verificar de manera correcta hipótesis del criterio del cociente.)**

Por lo tanto, el criterio del cociente muestra que $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ y $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{x}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ tienen el mismo comportamiento.

**(0,2 pts. por aplicar criterio del cociente de manera correcta)**

La última integral es igual a $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}+x}\,\mathrm{d}x$. Además, se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}+x} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

para todo $x>0$. **(0,2 pts. por realizar la mayoración de manera correcta.)**

Finalmente, la integral $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ es convergente por lo visto en clases.

**(0,2 pts. por usar la convergencia conocida.)**

Así, se concluye que $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}+x}\,\mathrm{d}x$ también es convergente por el criterio de mayoración.

**(0,2 pts. por aplicar el criterio de manera correcta)**

**Tercera forma para analizar $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ (Criterio de mayoración)**

Se sabe que $\operatorname{sen}(x) \le x$ para todo $x \ge 0$. Así,

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2} \le \frac{x}{x\sqrt[3]{x}+x^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}+x} \le \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ para cada } x > 0.$$

**(0,3 pts. por realizar la mayoración de manera correcta.)**

Por lo tanto, por el criterio de mayoración, para ver que $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ converge, basta ver que $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ converge.

Se tiene que la integral $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ es convergente por lo visto en clases.

**(0,4 pts. por usar la convergencia conocida.)**

Así, se concluye que $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}+x^{5/3}}\,\mathrm{d}x$ también es convergente por el criterio de mayoración.

**(0,3 pts. por aplicar el criterio de manera correcta)**

Ahora se analizará la convergencia de $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$. Como la función $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2}$ cambia de signo infinitas veces, se usará la convergencia absoluta, mostrando que $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

**(0,2 pts. por usar convergencia absoluta.)**

Se observa primero que

$$\frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x\sqrt[3]{x}+x^2} \le \frac{1}{x\sqrt[3]{x}+x^2}$$

**(0,2 pts. por realizar la mayoración de manera correcta.)**

De donde basta demostrar que $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ es convergente gracias al criterio de mayoración.

**(0,2 pts. por aplicar el criterio de manera correcta.)**

Esta integral se puede analizar con dos métodos:

**Primera forma para analizar $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ (Criterio del cociente)**

Se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x\sqrt[3]{x}+x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x\sqrt[3]{x}+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{-2/3}+1} = \frac{1}{0+1} = 1.$$

**(0,2 pts. por verificar de manera correcta hipótesis del criterio.)**

Por lo tanto, el criterio del cociente muestra que $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ y $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ tienen el mismo comportamiento.

**(0,2 pts. por aplicar el criterio de manera correcta)**

De lo visto en clases, la última integral es convergente, así que la primera, también.

**(0,2 pts. por usar la convergencia conocida.)**

**Segunda forma para analizar $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ (Criterio de mayoración)**

Se tiene que, para todo $x > 0$,

$$\frac{1}{x\sqrt[3]{x}+x^2} \leq \frac{1}{x^2},$$

de donde, gracias al criterio de mayoración, basta ver que la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

**(0,3 pts. por realizar la mayoración de manera correcta.)**

De lo visto en clases, esta última integral es convergente, así que la primera, también.

**(0,3 pts. por usar la convergencia conocida.)**

Como ambas integrales son convergentes, se concluye finalmente que $\int_{0^+}^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ es convergente.

**(0,2 pts. por concluir.)**

**Indicaciones de corrección**

- No es necesario especificar el tipo de ninguna de las integrales impropias.
- Para analizar la convergencia de $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt[3]{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ se puede analizar que es absolutamente convergente. Esto no hace ninguna diferencia, pues $\operatorname{sen}(x)$ es no negativa en $[0,1]$.
- Al separar por aditividad horizontal, el límite intermedio de integración puede ser cualquier número en $(0,\pi]$; se eligió el "1" arbitrariamente pero no hace ninguna diferencia. También podría ser un número mayor a $\pi$, pero, en tal caso, se debe justificar con más cuidado porque los criterios de mayoración y del cociente no aplican para integrales de funciones que cambian de signo (por ejemplo, usando la convergencia absoluta).
- Al usar el criterio del cociente, no es necesario *dividir* por $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ o por $\frac{1}{x^2}$, pues también se puede directamente *multiplicar* por $x^2$ o por $\sqrt[3]{x}$. Esto se justifica por la Observación de la página 126 del apunte.
- También podrían usarse otras combinaciones de los criterios/métodos presentados aquí.

**P3.** a) **(3,0 pts.)** Determine para qué valores de $r > 0$ la serie $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2k-3}{k^{3r/2}}\right)^k$ es convergente.

**Solución**

Se demostrará que la serie es convergente y solo si $r > 2/3$. Se observa primero que el término general de la serie es $a_n = \left(\frac{2n-3}{n^{3r/2}}\right)^n$, que es no negativo para $n \geq 2$.

**(0,2 pts. por notar que el término general es no negativo.)**

Para esto, se pueden usar el criterio del cocienteo el de la raíz $n$-ésima:

### Primera forma para demostrar la convergencia (Criterio del cociente)

Se tiene que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{2(n+1)-3}{(n+1)^{3r/2}}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n^{3r/2}}{2n-3}\right)^n = \left(\frac{2n-1}{2n-3}\right)^n \cdot \left(\frac{n^{3r/2}}{(n+1)^{3r/2}}\right)^n \cdot \frac{2n-1}{(n+1)^{3r/2}}$$
$$= \frac{\left(1-\dfrac{1/2}{n}\right)^n}{\left(1-\dfrac{3/2}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{1}{(1+1/n)^n}\right)^{3r/2} \cdot \frac{2n-1}{(n+1)^{3r/2}}.$$

**(0,2 pts. por expresar el cociente.)**

Ahora, se sabe que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\dfrac{1/2}{n}\right)^n}{\left(1-\dfrac{3/2}{n}\right)^n} = \frac{e^{-1/2}}{e^{-3/2}} = e^{3/2-1/2} = e$$ **(0,5 pts. por calcular este límite.)**

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(1+1/n)^n}\right)^{3r/2} = \frac{1}{e^{3r/2}}$$ **(0,5 pts. por calcular este límite.)**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{(n+1)^{3r/2}} = \begin{cases} \infty & \text{si } 3r/2 < 1 \\ 2 & \text{si } 3r/2 = 1 \\ 0 & \text{si } 3r/2 > 1 \end{cases} = \begin{cases} \infty & \text{si } r < 2/3 \\ 2 & \text{si } r = 2/3 \\ 0 & \text{si } r > 2/3. \end{cases}$$

**(0,5 pts. por calcular este límite.)**

Si $r = 2/3$, se tiene que $\dfrac{1}{e^{3r/2}} = \dfrac{1}{e}$, de donde se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \infty & \text{si } r < 2/3 \\ 2 & \text{si } r = 2/3 \\ 0 & \text{si } r > 2/3. \end{cases}$$ **(0,5 pts. por calcular el límite del cociente.)**

Así, del criterio del cociente, la serie es convergente si y solo si $r > 2/3$.

**(0,6 pts. por aplicar de manera correcta el criterio.)**

### Segunda forma para demostrar la convergencia (Criterio de la raíz $n$-ésima)

Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-3}{n^{3r/2}}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{n^{3r/2}}$$ **(0,8 pts. por expresar el límite)**

$$= \begin{cases} \infty & 3r/2 < 1 \\ 2 & 3r/2 = 1 \\ 0 & 3r/2 > 1 \end{cases} = \begin{cases} \infty & r < 2/3 \\ 2 & r = 2/3 \\ 0 & r > 2/3. \end{cases}$$ **(0,8 pts. por calcular el límite)**

Así, del criterio de la raíz $n$-ésima, la serie es convergente si y solo si $r > 2/3$.

**(1,2 pts. por aplicar de manera correcta el criterio.)**

**Indicaciones de corrección**

- Aquí se usan esencialmente límites de la forma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta} = \begin{cases} \infty & \alpha > \beta \\ 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha < \beta, \end{cases}$$

donde $\alpha, \beta > 0$ son fijos. Estos límites se pueden usar sin mayor justificación.

b) El objetivo de este problema es demostrar que $\frac{10}{e^2} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{e^k} \leq \frac{14}{e^2}$. Para esto, considere la función $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ dada por $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ y siga el siguiente esquema:

i) **(1,5 pts.)** Demuestre que, para todo natural $n \geq 2$, se tiene que

$$\sum_{k=3}^{n+1} f(k) \leq \int_2^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n} f(k).$$

Concluya que

$$\int_2^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_2^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x + f(2) - f(n+1).$$

**Solución**

Primero, se observa que $f$ es decreciente en $[2,\infty)$: su derivada es

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{x(2-x)}{e^x},$$

que es negativa si $x > 2$. **(0,3 pts. por mostrar que la función $f$ es decreciente.)**

Para demostrar la primera desigualdad pedida, se puede seguir un método algebraico o geométrico:

**Primera forma para demostrar la desigualdad (De manera algebraica)**

Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, sea $k \in \{2,\ldots,n\}$ y sea $x \in [k,k+1]$. Como $f$ es decreciente, se tiene que $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$. Integrando en $[k,k+1]$, la monotonía de la integral muestra que

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}x = f(k).$$

**(0,5 pts. por mostrar la desigualdad anterior.)**

Sumando desde $k=2$ hasta $k=n$, resulta que

$$\sum_{k=2}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n} f(k).$$

Por la aditividad horizontal, la expresión de la izquierda es igual a $\int_2^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Además,

$$\sum_{k=2}^{n} f(k+1) = \sum_{k=3}^{n+1} f(k)$$

de donde resulta

$$\sum_{k=3}^{n+1} f(k) \leq \int_2^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n} f(k).$$

**(0,3 pts. por mostrar la desigualdad anterior.)**

**Segunda forma para establecer la desigualdad (De manera geométrica)**

Es suficiente con mostrar un esquema explicando por qué la desigualdad es válida.

**(0,8 = 2 × 0,4 pts. por dibujar correctamente los diagramas.)**

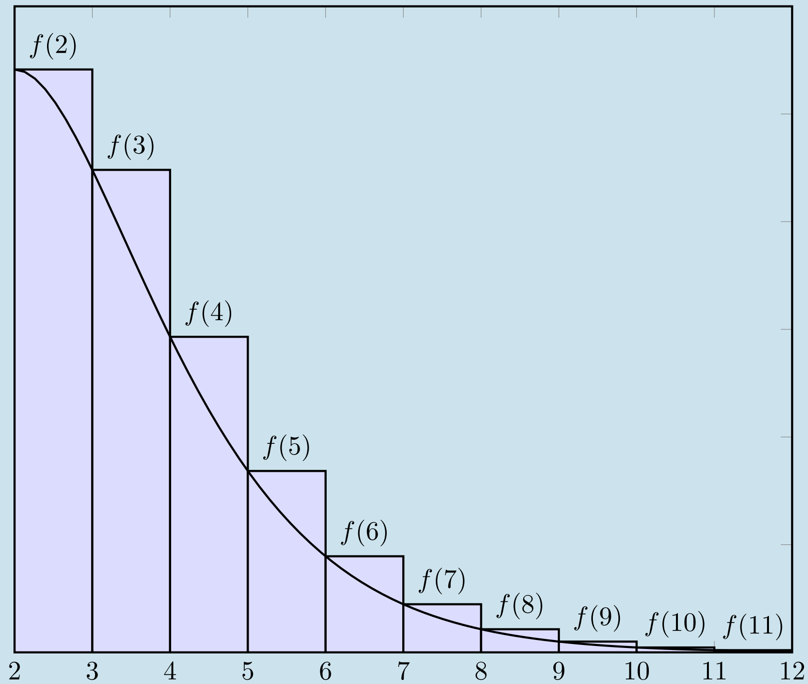



Figura 6: Demostración de $\displaystyle\int_2^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n} f(k)$.

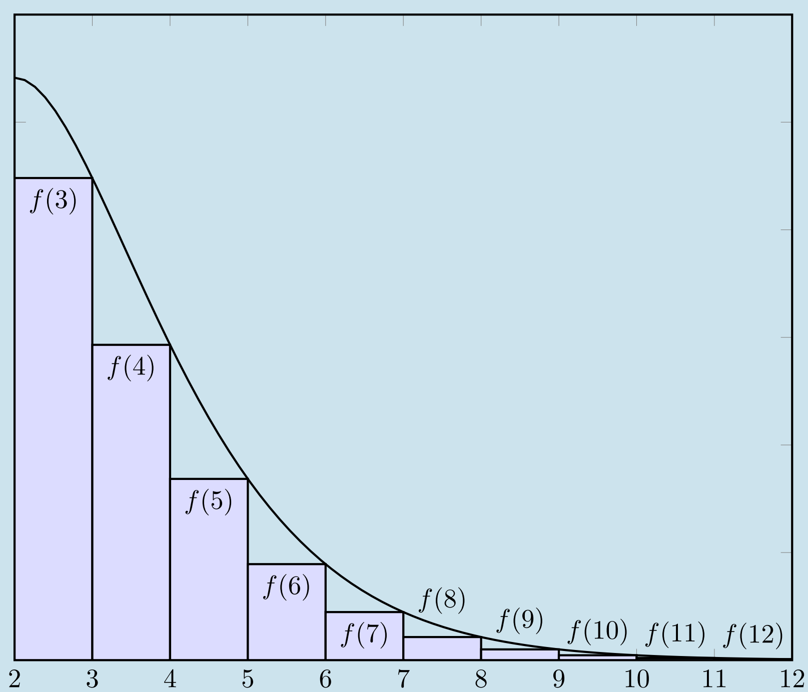



Figura 7: Demostración de $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1} f(k) \leq \int_2^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Finalmente, como

$$\sum_{k=3}^{n+1} f(k) = \sum_{k=2}^{n} f(k) - f(2) + f(n+1),$$

la última desigualdad se obtiene de observar que

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) - f(2) + f(n+1) \leq \int_2^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

y reordenar los términos. **(0,4 pts. por concluir el resultado.)**

**Indicaciones de corrección**

- La demostración geométrica solo necesita los esquemas y una explicación breve del tipo “al sumar los rectángulos con $k = 2$ hasta $n$ quedan por arriba de la función, y al sumarlos de $k = 3$ hasta $n+1$ quedan por debajo”. Si solo se incluyen los dibujos, sin ninguna explicación, se asignan **(0,5 pts.)**

ii) **(1,0 pto.)** Muestre que $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{10}{e^2}$.

**Solución**

Por defindión, se tiene que

$$\int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} \int_2^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} \int_2^{x} \frac{t^2}{e^t}\,\mathrm{d}t.$$

**(0,2 pts. por escribir la definición de la integral impropia.)**

Se calculará entonces $\displaystyle\int_2^{x} \frac{t^2}{e^t}\,\mathrm{d}t$, para terminar tomando $x \to \infty$.
Se comienza integrando por partes con

$$\begin{aligned} u &= t^2, & \mathrm{d}u &= 2t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v &= \frac{1}{e^t}\,\mathrm{d}t, & v &= -\frac{1}{e^t}, \end{aligned}$$

**(0,1 pts. por proponer la integración por partes.)**

para obtener que

$$\int_2^{x} \frac{t^2}{e^t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^2}{e^t}\right]\Bigg|_2^x - \int_2^{x} \left(-\frac{2t}{e^t}\right)\mathrm{d}t = -\frac{x^2}{e^x} + \frac{4}{e^2} + 2\int_2^{x} \frac{t}{e^t}\,\mathrm{d}t. \tag{$*$}$$

**(0,2 pts. por realizar la integración por partes.)**

Se calcula ahora $\displaystyle\int_2^{x} \frac{t}{e^t}\,\mathrm{d}t$. Integrando por partes nuevamente con

$$\begin{aligned} u &= t, & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v &= \frac{1}{e^t}\,\mathrm{d}t, & v &= -\frac{1}{e^t}, \end{aligned}$$

**(0,1 pts. por proponer la integración por partes.)**

resulta

$$\begin{aligned} \int_2^{x} \frac{t}{e^t}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{t}{e^t}\right]\Bigg|_2^x - \int_2^{x} \left(-\frac{1}{e^t}\right)\mathrm{d}t = -\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^2} + \int_2^{x} \frac{1}{e^t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^2} + \left[-\frac{1}{e^t}\right]\Bigg|_2^x = -\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^2} = \frac{3}{e^2} - \frac{x+1}{e^x}. \end{aligned}$$

**(0,2 pts. por realizar la integración de manera correcta.)**

Reemplazando en ($*$), se obtiene que

$$\int_2^{x} \frac{t^2}{e^t}\,\mathrm{d}t = -\frac{x^2}{e^x} + \frac{4}{e^2} + 2\left(\frac{3}{e^2} - \frac{x+1}{e^x}\right) = \frac{10}{e^2} - \frac{x^2+2x+2}{e^x}.$$

**(0,1 pts. por calcular la integral de manera correcta.)**

Tomando límite con $x \to \infty$, resulta que

$$\int_2^\infty \frac{t^2}{e^t} = \frac{10}{e^x},$$

ya que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$ para cualquier polinomio $P$ (y, en particular, para $P(x) = x^2 + 2x + 2$).

**(0,1 pts. por calcular límite de manera correcta.)**

**Indicaciones de corrección**

- También se puede calcular la primitiva $\int f$ de manera independiente y luego calcular el valor del límite.
- No es necesario decir que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$ para cualquier polinomio $P$; basta decir que el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+2}{e^x}$ es cero.

iii) **(0,5 pts.)** Concluya usando las partes anteriores.

**Solución**

De la parte i) se tiene que

$$\int_2^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_2^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x + f(2) - f(n+1).$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Tomando $n \to \infty$ y usando que $f$ es no negativa, resulta que

$$\int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{\infty} f(k) \leq \int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + f(2) - \lim_{n\to\infty} f(n+1).$$

**(0,2 pts. por usar la definición de integral impropia y establecer esta desigualdad.)**

Este último límite es

$$\lim_{n\to\infty} f(n+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{e^{n+1}} = 0.$$

Así, se deduce que

$$\int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{\infty} f(k) \leq \int_2^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + f(2).$$

**(0,1 pts. por enunciar este límite de manera correcta y concluir la desigualdad)**

De la parte ii), se sabe que $\int_2^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{10}{e^2}$. Además, $f(2) = \frac{4}{e^2}$. Por lo tanto,

$$\frac{10}{e^2} \leq \sum_{k=2}^{\infty} f(k) \leq \frac{10}{e^2} + \frac{4}{e^2} = \frac{14}{e^2}.$$

**(0,2 pts. por reemplazar $f(2)$ y concluir la desigualdad.)**

**Indicaciones de corrección**

- No es necesario explicar con tanto detalle. Basta decir algo como que se toma límite en la parte i) y se usa la parte ii).
- Tampoco es necesario justificar el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{e^{n+1}} = 0$; basta con escribirlo.