Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1101-Introducción al Cálculo. Primavera 2024.
Viernes 18 de octubre

PAUTA DEL CONTROL 2

P1. Considere la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{\frac{2}{x-3} + 1}$.

a) (1,5 ptos.) Encuentre el dominio de f, es decir, el mayor conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(x)$ es un número real bien definido para todo $x \in A$.

Solución

$f(x)$ está bien definido si y solo si $\frac{2}{x-3}+1 \geq 0$ y $x-3 \neq 0$. **0.7 ptos.** Resolviendo la inecuación obtenemos

$$\frac{2}{x-3} + 1 \geq 0 \iff \frac{x-1}{x-3} \geq 0.$$

Por lo tanto, $A = (-\infty, 1] \cup (3, \infty)$. **0.8 ptos.**

b) (1,5 ptos.) Encuentre el conjunto imagen $Im(f)$ y el/los cero/s de f.

Solución

Para encontrar los ceros resolvemos la ecuación $f(x) = 0$, para $x \in A$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \frac{2}{x-3} + 1 = 0 \\ &\iff \frac{2}{x-3} = -1 \\ &\iff 2 = -x + 3 \\ &\iff x = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el único cero de f es $x = 1$. **0.3 ptos.**
Para encontrar la imagen, nos preguntamos para qué valores $y \in \mathbb{R} = Cod(f)$, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Observamos que, como la raíz cuadrada de un número es positiva, cualquier $y < 0$ no está en la imagen, luego asumimos $y \geq 0$ y calculamos:

$$\begin{aligned} y = \sqrt{\frac{2}{x-3} + 1} &\overset{y\geq 0}{\iff} y^2 = \frac{2}{x-3} + 1 \\ &\iff y^2 - 1 = \frac{2}{x-3} \\ &\iff x - 3 = \frac{2}{y^2 - 1} \\ &\iff x = \frac{2}{y^2-1} + 3. \end{aligned}$$ **0.4 ptos.**

Solución

Así, para $y \geq 0$, $y \in Im(f)$ si y solo si, $y = f(x)$, con $x = \frac{2}{y^2-1} + 3 \in A = (-\infty, 1] \cup (3, \infty)$. Ahora,

$$\begin{aligned} \frac{2}{y^2-1} + 3 \leq 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{2}{y^2-1} + 2 \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{y^2}{y^2-1} \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad y \in (-1, 1). \qquad \textbf{0.3 ptos.} \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\frac{2}{y^2-1} + 3 > 3 \Longleftrightarrow \frac{2}{y^2-1} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty). \qquad \textbf{0.3 ptos.}$$

Así, la imagen es $[0, \infty) \cap [(-1, 1) \cup (-\infty, -1) \cup (1, \infty)] = [0, \infty) \setminus \{1\}$. **0.2 ptos.**

c) (1,5 ptos.) Pruebe que f es inyectiva y encuentre una formula para $f^{-1} : Im(f) \to A$.

Solución

Sean $x, y \in A$. Se tiene

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{2}{x-3} + 1} = \sqrt{\frac{2}{y-3} + 1} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2}{x-3} + 1 = \frac{2}{y-3} + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2}{x-3} = \frac{2}{y-3} \\ &\Longleftrightarrow \quad x - 3 = y - 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = y. \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es intyectiva. **0.7 ptos.** Del cáluclo de la imagen en *b*) y de la inyectividad de f se tiene que la única solución $x \in A$ de la ecuación $y = f(x)$, para $y \in [0, \infty) \setminus \{1\}$ está dada por $x = \frac{2}{y^2-1} + 3$, es decir, $f^{-1}(x) = \frac{2}{x^2-1} + 3$. **0.8 ptos.**

Nota: Otro argumento para la inyectividad es usar la parte d) (con o sin demostración debe asignarse el puntaje).

d) (1,5 ptos.) Pruebe que f es estrictamente decreciente.

Solución

Sean $x, y \in A$. Se tiene

$$\begin{aligned}
x < y \quad &\iff \quad x - 3 < y - 3 \\
&\overset{(\cdot)^{-1} est.decrec.}{\iff} \quad \frac{1}{y-3} = \frac{1}{x-3} \textcolor{red}{\textbf{0.7 ptos.}} \\
&\iff \quad \frac{2}{y-3} + 1 < \frac{2}{x-3} + 1 \\
&\overset{\sqrt{\cdot} est.crec.}{\iff} \quad \sqrt{\frac{2}{y-3} + 1} < \sqrt{\frac{2}{x-3} + 1} \\
&\iff \quad f(y) < f(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto f es estrictamente decreciente. **0.8 ptos.**

P2. Elegir **solo una** entre las partes *a*) y *b*). La parte *c*) se debe resolver.

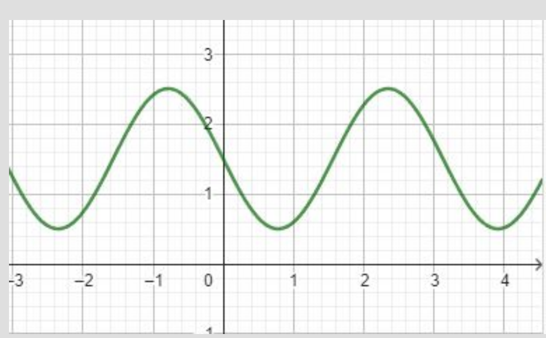
a) (3 ptos.) Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = A - \operatorname{sen}(2x)$, con $A \in \mathbb{R}$ constante. Determine la paridad, el período mínimo, el/los cero/s de f y realice un esbozo del gráfico de f.

Solución

Como la función seno es impar y una función constante no nula es par (es impar si es nula), f es impar si y solo si $A = 0$.**0.4 ptos.** Para cualquier $A \neq 0$, f no es par ni impar pues suma de impar con par no puede ser par a menos que sean ambas nulas. **0.4 ptos.** El período mínimo es el período mínimo de $x \mapsto \operatorname{sen}(2x)$ el cuál es π. **0.6 ptos.** Los ceros son las soluciónes de la ecuación $\operatorname{sen}(2x) = A$, es decir, el conjunto de ceros es

$$\begin{cases} \emptyset, & \text{si } |A| > 1 \\ \{(-1)^k \frac{\arcsin(A)}{2} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}, & \text{si } |A| \leq 1.\textcolor{red}{\textbf{0.8 ptos.}} \end{cases}$$

El gráfico es una traslación vertical en $|A|$ unidades (hacia arriba si $A > 0$ y hacia abajo si $A < 0$) del gráfico de $-\operatorname{sen}(2x)$ el cuál es una reflexión con respecto al eje X de la función $\operatorname{sen}(2x)$. Abajo se muestra el gráfico para $A = 3/2$. **0.8 ptos.**



b) (3 ptos.) Considere la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \tan(x) - \operatorname{sen}(2x)$. Determine el dominio de f, la paridad, el período mínimo, el/los cero/s de f.

Solución

El dominio corresponde al dominio de la tangente, el cual es $\mathbb{R} \setminus \{\frac{(2k+1)\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$. **0.4 ptos.** La función es impar al ser resta de funciones impares. **0.6 ptos.** Su período mínimo es π al ser π el período mínimo de la tangente y π el período mínimo de $x \mapsto \operatorname{sen}(2x)$. **0.5 ptos.** Finalmente, los ceros están dados por las soluciones de la ecuación trigonométrica $\tan(x) - \operatorname{sen}(2x) = 0$. Veamos,

$$
\begin{aligned}
\tan(x) - \operatorname{sen}(2x) = 0 &\iff \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = 0 \qquad \textbf{0.5 ptos.}\\
&\iff \operatorname{sen}(x)\left(\frac{1}{\cos(x)} - 2\cos(x)\right) = 0\\
&\iff \operatorname{sen}(x) = 0 \lor \frac{1}{\cos(x)} - 2\cos(x) = 0\\
&\iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \lor \frac{1 - 2\cos^2(x)}{\cos(x)} = 0 \qquad \textbf{0.5 ptos.}\\
&\iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \lor \cos(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \lor x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \lor\\
&\qquad x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \qquad \textbf{0.5 ptos.}
\end{aligned}
$$

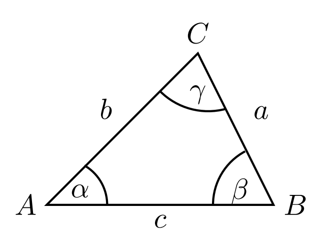
c) (3 ptos.) Demuestre la identidad trigonométrica $\cos(4x) = 1 - 8\sin^2(x)\cos^2(x)$.

Solución

Veamos, para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\cos(4x) &= \cos^2(2x) - \operatorname{sen}^2(2x) \qquad \textbf{0.8 ptos.}\\
&= 1 - \operatorname{sen}^2(2x) - \operatorname{sen}^2(2x) \qquad \textbf{0.8 ptos.}\\
&= 1 - 2\operatorname{sen}^2(2x)\\
&= 1 - 2[2\operatorname{sen}(x)\cos(x)]^2 \qquad \textbf{0.8 ptos.}\\
&= 1 - 8\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x). \qquad \textbf{0.6 ptos.}
\end{aligned}
$$

P3. Considere el triángulo de la figura



a) (2 ptos.) Use el teorema del seno para probar que

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\gamma)}.$$

Solución

Del teorema del seno se puede deducir que $\frac{a}{c} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\gamma)}$ **0.8 ptos.** y que $\frac{b}{c} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\gamma)}$. **0.8 ptos.** Sumando los lados correspondientes se obtiene la identidad deseada. **0.4 ptos.**

b) (2 ptos.) Demuestre la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Solución

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, sumando los lados correspondientes de las identidades $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$, $\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\cos(x)$, **0.5 ptos.** se obtiene que

$$\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(y) \qquad \textbf{1 pto.}$$

En particular, si $\alpha = x+y$, $\beta = x-y$, se tiene que $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$, concluyendo la identidad deseada. **0.5 ptos.**

c) (2 ptos.) Use las partes a), b) y una fórmula de ángulo doble para probar la fórmula de Mollweide

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Solución

De las partes a) y b) se obtiene que

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)+\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\gamma)} = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\gamma)} \qquad \textbf{0.4 ptos.}$$

Por otra parte, $\operatorname{sen}(\gamma) = \operatorname{sen}\left(2\frac{\gamma}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ **0.7 ptos.** y como $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, se tiene que $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ **0.7 ptos.** Por lo tanto,

$$\frac{a+b}{c} = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\gamma)} = \frac{2\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \textbf{0.2 ptos.}$$

TIEMPO: 3 horas

No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.