Control 2

P1. a) **(3,0 pts.)** Calcule la primitiva $\int x^3 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$.

b) **(3,0 pts.)** Calcule la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3\operatorname{sen}(x)+\cos(x)+3}\,\mathrm{d}x$.

P2. a) **(3,0 pts.)** Calcule el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (1-e^{-t^2})\,\mathrm{d}t}{\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,\mathrm{d}t}$.

b) Sea $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función dos veces derivable y tal que f'' es continua. Sea además $H\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ la función dada por $H(t)=t(1-t)f''(t)$.

i) **(0,5 pts.)** Justifique que H es Riemann integrable en $[0,1]$.

ii) **(2,5 pts.)** Demuestre que

$$\int_0^1 H(t)\,\mathrm{d}t = f(1)+f(0)-2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indicación: Puede serle útil usar integración por partes.

P3. a) **(3,0 pts.)** Sea $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ fijo. Considere la partición equiespaciada $P=\{x_0,\ldots,x_n\}$ del intervalo $[0,1]$, es decir, aquella dada por $x_i=\dfrac{i}{n}$ para cada $i\in\{0,\ldots,n\}$. Considere además las funciones $f_-, f_+\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f_-(x)=\inf\{f(u)\ \mid\ u\in[x_{i-1},x_i]\}$$
$$f_+(x)=\sup\{f(u)\ \mid\ u\in[x_{i-1},x_i]\}$$

para cada $x\in(x_{i-1},x_i)$, e iguales a $f(x_i)$ en cada punto x_i de la partición P.

i) **(0,5 pts.)** Justifique que $f_-\in\mathcal{E}_-(f)$ y que $f_+\in\mathcal{E}_+(f)$.

ii) **(2,5 pts.)** Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}\le\frac{\pi}{4}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+(i-1)^2}.$$

Indicación: Puede serle útil notar que f es decreciente.

b) Para $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, considere la función $f_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f_n(x)=x^ne^x$.

i) **(0,5 pts.)** Justifique que f_n es Riemann integrable para todo $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Definimos ahora la sucesión (α_n) por $\alpha_n=(n+1)\int_0^1 f_n$ para cada $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, es decir, $\alpha_n=(n+1)\int_0^1 x^ne^x\,\mathrm{d}x$.

ii) **(0,5 pts.)** Justifique que $\alpha_n\ge 0$ para todo $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

iii) **(1,5 pts.)** Pruebe que $\alpha_n=e-\dfrac{\alpha_{n+1}}{n+2}$ para todo $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Deduzca que la sucesión (α_n) está acotada superiormente por e.

iv) **(0,5 pts.)** Concluya que $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=e$.

Si usa un teorema, no olvide verificar explícitamente cada una de sus hipótesis.

Duración: 3h.