Pauta de corrección Control 2

P1. a) **(3,0 pts.)** Calcule la primitiva $\int x^3 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Solución

Primera forma (empezando con un cambio de variable)

Se comienza con el cambio de variable

$$t = x^2, \qquad \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$$

(0,6 pts. por proponer el cambio de variable)

de donde la primitiva queda

$$\frac{1}{2}\int t\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

(0,6 pts. por definir la primitiva)

Ahora, se usa integración por partes con

$$\begin{aligned} u &= t, & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v &= \cos(t)\,\mathrm{d}t, & v &= \operatorname{sen}(t). \end{aligned}$$

(0,6 pts. por proponer la integración por partes)

Así, la primitiva queda

$$\frac{1}{2}\left[t\operatorname{sen}(t) - \int \operatorname{sen}(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{t\operatorname{sen}(t) + \cos(t)}{2} + C.$$

(0,6 pts. por resolver la primitiva)

Volviendo a la variable original, resulta que:

$$\int x^3\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\operatorname{sen}(x^2) + \cos(x^2)}{2} + C$$

(0,6 pts. por volver a la variable original)

Segunda forma (integrando por partes directamente)

Se usa integración por partes con

$$u = x^2, \qquad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = x\cos(x^2)\,\mathrm{d}t, \qquad v = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2}.$$

(1,0 pto. por proponer la integración por partes)

Por lo tanto,

$$\int x^3\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\operatorname{sen}(x^2)}{2} - \int \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2}\cdot(2x)\,\mathrm{d}x$$

(1,0 pto. por hacer la integración por partes)

$$= \frac{x^2\operatorname{sen}(x^2)}{2} - \int x\operatorname{sen}(x^2)\,\mathrm{d}x$$

(1,0 pto. por resolver la primitiva)

$$= \frac{x^2\operatorname{sen}(x^2)}{2} - \frac{-\cos(x^2)}{2} + C$$
$$= \frac{x^2\operatorname{sen}(x^2) + \cos(x^2)}{2} + C.$$

b) **(3,0 pts.)** Calcule la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3\operatorname{sen}(x)+\cos(x)+3}\,\mathrm{d}x$.

Solución

Se comienza con el cambio de variable de Weierstrass

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \qquad \operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

(0,6 pts. por proponer el cambio de variable)

de donde la integral queda

$$\int_{\tan(0/2)}^{\tan(\pi/4)} \frac{1}{3\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+3}\cdot\left(\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\right) = \int_0^1 \frac{2}{(6t)+(1-t^2)+(3+3t^2)}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \frac{2}{2t^2+6t+4}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{t^2+3t+2}\,\mathrm{d}t,$$

(0,6 pts. por proponer la integral con la nueva variable)

donde se usó que $\tan(0) = 0$ y que $\tan(\pi/4) = 1$.
Se continúa factorizando el polinomio del denominador: como $t^2+3t+2 = (t+1)(t+2)$, la integral buscada es igual a

$$\int_0^1 \frac{1}{(t+1)(t+2)}\,\mathrm{d}t.$$

Ahora, se usan fracciones parciales. Se buscan constantes $A, B \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2} = \frac{A(t+2)+B(t+1)}{(t+1)(t+2)},$$

de donde $1 = A(t+2) + B(t+1)$. **(0,6 pts. por proponer las fracciones parciales)**

Primera forma para encontrar A y B (igualando coeficientes)

Expandiendo en la igualdad anterior, se obtiene que $1=(A+B)t+(2A+B)$. Como esta es una igualdad de polinomios, cada coeficiente debe coincidir. Así, resultan las ecuaciones

$$\begin{aligned} A+B&=0\\ 2A+B&=1. \end{aligned}$$

Restando la primera ecuación a la segunda resulta que $A=1$, y despejando queda que $B=-1$.

(0,6 pts. por encontrar las constantes)

Segunda forma para encontrar A y B (evaluando en valores convenientes)

Como la igualdad debe ser válida para todo $t\in\mathbb{R}$ (o incluso $t\in\mathbb{C}$), se puede evaluar en cualquier punto para encontrar ecuaciones. Evaluando en $t=-1$ muestra inmediatamente que $A=1$, mientras que, evaluando en $t=-2$, muestra que $B=-1$.

(0,6 pts. por encontrar las constantes)

Así, resulta que

$$\frac{1}{(t+1)(t+2)}=\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2},$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2}\frac{1}{3\operatorname{sen}(x)+\cos(x)+3}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \Big[\ln|t+1|-\ln|t+2|\Big]\Big|_0^1\\ &= (\ln|1+1|-\ln|1+2|)-(\ln|0+1|-\ln|0+2|)\\ &= (\ln(2)-\ln(3))-(\ln(1)-\ln(2)) = 2\ln(2)-\ln(3)=\ln\left(\frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

(0,6 pts. por calcular la integral)

Alternativa

También es posible seguir un camino similar para encontrar la primitiva $\displaystyle\int\frac{1}{3\operatorname{sen}(x)+\cos(x)+3}\,\mathrm{d}x$ primero, con la única diferencia de que, en este caso, se debe volver a la variable original. Se obtiene que

$$\int\frac{1}{3\operatorname{sen}(x)+\cos(x)+3}=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right|-\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+2\right|+C,$$

de donde

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2}\frac{1}{3\operatorname{sen}(x)+\cos(x)+3}\\ &=\left[\ln\left|\tan\left(\frac{\pi/2}{2}\right)+1\right|-\ln\left|\tan\left(\frac{\pi/2}{2}\right)+2\right|\right]-\left[\ln\left|\tan\left(\frac{0}{2}\right)+1\right|-\ln\left|\tan\left(\frac{0}{2}\right)+2\right|\right]\\ &=\ln|1+1|-\ln|1+2|-\ln|0+1|+\ln|0+2|=\ln\left(\frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

(0,6 pts. por calcular la integral)

P2. a) **(3,0 pts.)** Calcule el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(1-e^{-t^2})\,\mathrm{d}t}{\int_0^x\operatorname{sen}(t^2)\,\mathrm{d}t}$.

Solución

Se usará el teorema fundamental del cálculo junto con la regla de l'Hôpital.
Primero, las funciones $(1-e^{-t^2})$ y $\operatorname{sen}(t^2)$ son continuas al ser combinaciones de funciones exponenciales, trigonométricas y polinomios. **(0,2 pts. por justificar que estas funciones son continuas)**

Por el teorema fundamental del cálculo, se concluye que las funciones $\displaystyle\int_0^x (1-e^{-t^2})\,\mathrm{d}t$ y $\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,\mathrm{d}t$ son derivables. **(0,2 pts. por justificar que estas funciones son derivables)**

Asimismo, estas últimas funciones son continuas, lo que muestra que el límite es de la forma "0/0". **(0,2 pts. por justificar que el límite es de la forma "0/0")**

El teorema fundamental del cálculo también establece que las derivadas de $\displaystyle\int_0^x (1-e^{-t^2})\,\mathrm{d}t$ y $\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,\mathrm{d}t$ son $1-e^{-x^2}$ y $\operatorname{sen}(x^2)$, respectivamente. **(0,2 pts. por encontrar las derivadas de estas funciones)**

Más aún, la función $\displaystyle\left(\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,\mathrm{d}t\right)' = \operatorname{sen}(x^2)$ no se anula en el intervalo $(-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ si $x \neq 0$. **(0,2 pts. por justificar que esta derivada no se anula)**

Por lo tanto, se satisfacen las hipótesis de la regla de l'Hôpital y resulta que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x (1-e^{-t^2})\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,\mathrm{d}t} \overset{\text{(l'Hôp.)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x^2}}{\operatorname{sen}(x^2)}$$

(1,0 pto. por usar la regla de l'Hôpital)

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1-e^{-u}}{\operatorname{sen}(u)} = \lim_{u\to 0} \frac{e^{-u}-1}{-u}\cdot\frac{u}{\operatorname{sen}(u)} = 1\cdot 1 = 1,$$

(0,8 pts. por completar el cálculo)

donde se usó el cambio de variable $u = x^2$, y se usaron los límites conocidos

$$\lim_{u\to 0} \frac{e^{-u}-1}{-u} = 1, \qquad \lim_{u\to 0} \frac{u}{\operatorname{sen}(u)} = 1.$$

(0,2 pts. por mencionar los límites conocidos)

Alternativa

También se puede usar la regla de l'Hôpital nuevamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x^2}}{\operatorname{sen}(x^2)} \overset{\text{(l'Hôp.)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{-x^2}}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}}{\cos(x^2)} = \frac{e^{-0^2}}{\cos(0^2)} = \frac{1}{1} = 1,$$

justificando que el límite es de la forma "0/0", que ambas funciones son derivables al ser combinaciones de funciones exponenciales, trigonométricas y polinomios, y que $2x\cos(x^2)$ no se anula en el intervalo $(-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ si $x \neq 0$.

Alternativa

También se puede usar la regla de l'Hôpital nuevamente después de haber hecho el cambio de variable $u = x^2$:

$$\lim_{u\to 0} \frac{1-e^{-u}}{\operatorname{sen}(u)} \overset{\text{(l'Hôp.)}}{=} \lim_{u\to 0} \frac{e^{-u}}{\cos(u)} = \frac{e^{-0}}{\cos(0)} = \frac{1}{1} = 1,$$

justificando que el límite es de la forma "0/0", que ambas funciones son derivables al ser combinaciones de funciones exponenciales, trigonométricas y polinomios, y que $\cos(u)$ no se anula en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ si $u \neq 0$.

b) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable y tal que f'' es continua. Sea además $H\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $H(t) = t(1-t)f''(t)$.

i) **(0,5 pts.)** Justifique que H es Riemann integrable en $[0,1]$.

Solución

Se tiene que H es Riemann integrable porque es continua. En efecto, es la multiplicación del polinomio $t(1-t)$ y la función f'' (que es continua por hipótesis). **(0,5 pts. por justificar)**

ii) **(2,5 pts.)** Demuestre que

$$\int_0^1 H(t)\,\mathrm{d}t = f(1) + f(0) - 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indicación: Puede serle útil usar integración por partes.

Solución

Se tiene que

$$\int_0^1 H(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t(1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

Esta integral se puede desarrollar usando dos métodos

Primera forma para calcular $\int_0^1 t(1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$ (integrando por partes directamente)

Siguiendo la indicación, se usa integración por partes con

$$\begin{aligned} u &= t(1-t), & \mathrm{d}u &= (1-2t)\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v &= f''(t)\,\mathrm{d}t, & v &= f'(t). \end{aligned}$$

(0,5 pts. por proponer la integración por partes)

Así, resulta que

$$\begin{aligned} \int_0^1 H(t)\,\mathrm{d}t &= (1-t)tf'(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 (1-2t)f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (1-1)\cdot 1\cdot f'(1) - (1-0)\cdot 0\cdot f'(0) - \int_0^1 (1-2t)f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (2t-1)f'(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

(0,5 pts. por calcular la integral)

Segunda forma para calcular $\int_0^1 t(1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$ (expandiendo primero)

Se tiene que

$$\int_0^1 t(1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (t-t^2)f''(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 tf''(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^2 f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

Se desarrollarán estas dos integrales por separado usando integración por partes.
Primero, se integra por partes con

$$\begin{aligned} u &= t & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v &= f''(t)\,\mathrm{d}t, & v &= f'(t), \end{aligned}$$

(0,2 pts. por proponer la integración por partes)

para llegar a que

$$\int_0^1 tf''(t)\,\mathrm{d}t = tf'(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t = 1\cdot f'(1) - 0\cdot f'(0) - \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t = f'(1) - \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(0,2 pts. por calcular la integral)

Por otro lado, se integra por partes con

$$\begin{aligned} u &= t^2 & \mathrm{d}u &= 2t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v &= f''(t)\,\mathrm{d}t, & v &= f'(t), \end{aligned}$$

(0,2 pts. por proponer la integración por partes)

para obtener que

$$\int_0^1 t^2 f''(t)\,\mathrm{d}t = t^2 f'(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 2tf'(t)\,\mathrm{d}t = 1^2\cdot f'(1) - 0^2\cdot f'(0) - 2\int_0^1 tf'(t)\,\mathrm{d}t = f'(1) - 2\int_0^1 tf'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(0,2 pts. por calcular la integral)

Juntando ambos cálculos, resulta que

$$\int_0^1 t(1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t = \left(f'(1) - \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right) - \left(f'(1) - 2\int_0^1 tf'(t)\,\mathrm{d}t\right) = 2\int_0^1 tf'(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(0,2 pts. por juntar los resultados)

Dependiendo del resultado obtenido con la primera integración por partes, hay dos formas de continuar:

Cálculo para $\int_0^1 (2t-1)f'(t)\,\mathrm{d}t$ (versión sin expandir)

Usando nuevamente integración por partes con

$$\begin{aligned} u &= 2t-1 & \mathrm{d}u &= 2\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v &= f'(t)\,\mathrm{d}t, & v &= f(t), \end{aligned}$$

(0,5 pts. por proponer la integración por partes)

se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_0^1 H(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (2t-1)f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (2t-1)f(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 2f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (2\cdot 1-1)\cdot f(1) - (2\cdot 0 - 1)\cdot f(0) - 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(1)+f(0)-2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

(1,0 pto. por calcular la integral)

Cálculo para $2\int_0^1 tf'(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t$ (versión expandida)

Se tiene que

$$\int_0^1 (2t-1)f'(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 tf'(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Por el teorema fundamental del cálculo, la última integral es igual a $f(1)-f(0)$. Así,

$$\int_0^1 (2t-1)f'(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 tf'(t)\,\mathrm{d}t - f(1) + f(0).$$

(0,5 pts. por calcular la integral)

Usando nuevamente integración por partes con

$$\begin{aligned} u &= t & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v &= f'(t)\,\mathrm{d}t, & v &= f(t), \end{aligned}$$

(0,5 pts. por proponer la integración por partes)

se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_0^1 H(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 tf'(t)\,\mathrm{d}t - f(1) + f(0) \\ &= 2\left(tf(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right) - f(1) + f(0) \\ &= 2\cdot 1\cdot f(1) - 2\cdot 0\cdot f(0) - 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - f(1) + f(0) \\ &= f(1)+f(0)-2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

(0,5 pts. por calcular la integral)

P3. a) **(3,0 pts.)** Sea $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ fijo. Considere la partición equiespaciada

$P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[0,1]$, es decir, aquella dada por $x_i = \dfrac{i}{n}$ para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$. Considere además las funciones $f_-, f_+ \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_-(x) = \inf\{f(u) \ \mid \ u \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$f_+(x) = \sup\{f(u) \ \mid \ u \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

para cada $x \in (x_{i-1}, x_i)$, e iguales a $f(x_i)$ en cada punto x_i de la partición P.

i) **(0,5 pts.)** Justifique que $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y que $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$.

Solución

Las funciones f_- y f_+ son escalonadas por definición, pues toman valores constantes en los intervalos abiertos (x_{i-1}, x_i) que definen la partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$.

(0,2 pts. por justificar que son escalonadas)

Además, si $x \in (x_{i-1}, x_i)$, también por definición se tiene que

$$f_-(x) = \inf\{f(u) \ \mid \ u \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq f(x) \leq \sup\{f(u) \ \mid \ u \in [x_{i-1}, x_i]\} = f_+(x),$$

pues $f_-(x)$ y $f_+(x)$ corresponden al ínfimo y supremo, respectivamente, de todos los valores de f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ (que contiene a (x_{i-1}, x_i)). **(0,2 pts. por estudiar dentro de los intervalos)**

Finalmente, en cada punto x_i de la partición se tiene que $f_-(x) = f(x) = f_+(x)$, de donde

$$f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x)$$

para todo $x \in [0,1]$. **(0,1 pts. por estudiar en los extremos de los intervalos)**

Alternativa

También se puede justificar que $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$ argumentando que son funciones escalonadas "conocidas": aquellas que dan la suma inferior y superior, respectivamente, o "la más grande que va por debajo de f" y "la más pequeña que va por arriba de f" (dentro de aquellas subordinadas a la partición P). **(0,5 pts. por justificar)**

ii) **(2,5 pts.)** Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2 + i^2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2 + (i-1)^2}.$$

<u>Indicación:</u> Puede serle útil notar que f es decreciente.

Solución

Siguiendo la indicación, primero observamos que f es Riemann integrable porque es decreciente.

(0,2 pts. por probar que es Riemann integrable)

Alternativa

También se puede argumentar que f es Riemann integrable porque es monótona, o porque es continua.

(0,2 pts. por probar que es Riemann integrable)

Como $f_- \in \mathcal{E}_-(f)$ y $f_+ \in \mathcal{E}_+(f)$, se tiene, por definición de integral de Riemann, que

$$\int_0^1 f_- \leq \int_0^1 f \leq \int_0^1 f_+. \tag{1}$$

(0,3 pts. por dar la desigualdad)

Ahora, como f es decreciente se tiene que, si $x \in (x_{i-1}, x_i)$:

$$f_-(x) = \inf\{f(x) \ \mid \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1}) = \frac{1}{1 + x_{i-1}^2} = \frac{1}{1 + \dfrac{(i-1)^2}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2 + (i-1)^2}$$

$$f_-(x) = \sup\{f(x) \ \mid \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i) = \frac{1}{1 + x_i^2} = \frac{1}{1 + \dfrac{i^2}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2 + i^2},$$

(0,5 pts. por entregar los valores de $f_{\pm}(x)$)

ya que el ínfimo se alcanza en el extremo izquierdo del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, y el supremo se alcanza en el extremo derecho del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Como además la partición es equiespaciada, se tiene que $\Delta x_i = \dfrac{1}{n}$. Así,

$$\int_0^1 f_- = \sum_{i=1}^n \frac{n^2}{n^2+i^2} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2+i^2}$$

$$\int_0^1 f_+ = \sum_{i=1}^n \frac{n^2}{n^2+(i-1)^2} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2+(i-1)^2}.$$

(0,5 pts. por calcular los valores de las integrales)

Finalmente,

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x)\Big|_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4},$$

(0,5 pts. por calcular la integral)

y la desigualdad buscada sale directamente de reemplazar el resultado de de estos cálculos en (1).

(0,5 pts. por concluir)

b) Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, considere la función $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n e^x$.

i) **(0,5 pts.)** Justifique que f_n es Riemann integrable para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Solución

La función f_n es Riemann integrable porque es continua, al ser una multiplicación de un polinomio y una función exponencial. **(0,5 pts. por justificar que es Riemann integrable)**

Alternativa

También es posible argumentar que f_n es Riemann integrable por ser monótona, o por ser creciente.

(0,5 pts. por justificar que es Riemann integrable)

Definimos ahora la sucesión (α_n) por $\alpha_n = (n+1)\displaystyle\int_0^1 f_n$ para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, es decir, $\alpha_n = (n+1)\displaystyle\int_0^1 x^n e^x\,\mathrm{d}x$.

ii) **(0,5 pts.)** Justifique que $\alpha_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Solución

Se tiene que $x^n e^x \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$, de donde $f_n \geq 0$. **(0,2 pts. por justificar que $f_n \geq 0$)**

Por lo tanto, de la monotonía de la integral de Riemann se concluye que $\displaystyle\int_0^1 f_n \geq 0$. Esto implica que $\alpha_n \geq 0$, pues $n+1 \geq 0$. **(0,3 pts. por concluir)**

iii) **(1,5 pts.)** Pruebe que $\alpha_n = e - \dfrac{\alpha_{n+1}}{n+2}$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Deduzca que la sucesión (α_n) está acotada superiormente por e.

Solución

Primera forma (integrando por partes para aumentar el exponente)

Se aplica integración por partes a la integral $\int_0^1 x^n e^x \,\mathrm{d}x$ con

$$\begin{aligned} u &= e^x, & \mathrm{d}u &= e^x \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= x^n \,\mathrm{d}x, & v &= \frac{x^{n+1}}{n+1}, \end{aligned}$$

(0,4 pts. por por proponer la integración por partes)

obteniendo

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n e^x \,\mathrm{d}x &= \left[e^x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} e^x \,\mathrm{d}x \\ &= e^1 \cdot \frac{1^{n+1}}{n+1} - e^0 \cdot \frac{0^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} e^x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1}\left(e - \int_0^1 x^{n+1} e^x \,\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

(0,4 pts. por calcular la integral)

Así,

$$\alpha_n = (n+1)\int_0^1 x^n e^x \,\mathrm{d}x = e - \int_0^1 x^{n+1} e^x \,\mathrm{d}x = e - \frac{1}{n+2} \cdot \underbrace{(n+2)\int_0^1 x^{n+1} e^x \,\mathrm{d}x}_{\alpha_{n+1}} = e - \frac{\alpha_{n+1}}{n+2}.$$

(0,4 pts. por despejar $\boldsymbol{\alpha_n}$)

Segunda forma (integrando por partes para reducir el exponente)

Se aplica integración por partes a la integral $\int_0^1 x^{n+1} e^x \,\mathrm{d}x$ con

$$\begin{aligned} u &= x^{n+1}, & \mathrm{d}u &= (n+1)x^n \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= e^x \,\mathrm{d}x, & v &= e^x, \end{aligned}$$

(0,4 pts. por por proponer la integración por partes)

obteniendo

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{n+1} e^x \,\mathrm{d}x &= x^{n+1} e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (n+1) x^n e^x \,\mathrm{d}x \\ &= 1^{n+1} \cdot e^1 - 0^{n+1} \cdot e^0 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x \,\mathrm{d}x \\ &= e - (n+1)\int_0^1 x^n e^x \,\mathrm{d}x = e - \alpha_n. \end{aligned}$$

(0,4 pts. por calcular la integral)

Despejando α_n,

$$\alpha_n = e - \int_0^1 x^{n+1} e^x \,\mathrm{d}x = e - \frac{1}{n+2} \cdot \underbrace{(n+2)\int_0^1 x^{n+1} e^x \,\mathrm{d}x}_{\alpha_{n+1}} = e - \frac{\alpha_{n+1}}{n+2}.$$

(0,4 pts. por despejar $\boldsymbol{\alpha_n}$)

Finalmente, como, por la parte anterior, $\alpha_{n+1} \geq 0$, se deduce que $\alpha_n \leq e$ (se obtiene restándole un número positivo a e).

(0,3 pts. por justificar el acotamiento)

iv) **(0,5 pts.)** Concluya que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = e$.

Solución

De la parte anterior se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \left(e - \frac{\alpha_{n+1}}{n+2}\right) = e - \lim_{n\to\infty} \alpha_{n+1} \cdot \frac{1}{n+2}.$$

(0,1 pts. por usar álgebra de límites)

Como la sucesión (α_{n+1}) es acotada (se vio que es acotada inferiormente por 0 y superiormente por e) y la sucesión $\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$ es nula, se concluye que el límite del lado derecho es 0.

(0,3 pts. calcular el límite del lado derecho)

Así, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = e$.

(0,1 pts. por concluir)