Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Cálculo MA1001-P

Control 1

P1. (6.0 ptos)

a) (1.5 ptos)

Solución: Sabemos por el axioma **(A1)** que $2 \in C$, luego, tomando $x = 2$ en el axioma **(A2)**, obtenemos que $3 * 2 + 1 = 7 \in C$. Finalmente, si se considera en el axioma **(A.3)** los valores de $x = 7$ y $y = 2$, se obtiene que $7 + 2 = 9 \in C$.

b) (1.5 ptos)

Solución: Razonemos por absurdo. Supongamos que 1 sí pertenece a C, entonces el axioma **(A1)** nos permite considerar $x = 2 \in C$ y el supuesto anterior tomar $y = 1 \in C$. Si tomamos estos valores en el axima **(A3)**, obtenemos que $2+1 = 3 \in C$, lo cual contradice el axioma **(A4)**. Por lo tanto tenemos que $1 \notin C$.

c) (1.5 ptos)

Solución: Sabemos por el axioma **(A2)** que si $x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$. Por otra parte, usando el axioma **(A3)** tenemos que si $y \in C$ entonces, $y + y = 2y \in C$, aplicando una segunda vez el axioma **A3** para los valores $y \in C$ y $2y \in C$, podemos concluir que $2y + y = 3y \in C$. Finalmente se puede concluir usando el axioma **(A3)**, que como $3x + 1 \in C$ y $3y \in C$ entonces $3x + 1 + 3y \in C$.

d) (1.5 ptos)

Solución: Razonemos por absurdo (o por contradicción). Supongamos que $x \in C$ y que también $-x \in C$, entonces, por el axioma **(A3)** se tiene que $x + (-x) = 0 \in C$, esto es $0 \in C$. Ahora, si se considera $x = 0$ en el axioma **(A2)**, entonces $3*0+1 \in C$, dado que todo número multiplicado por 0 es igual a cero, obtenemos que $1 \in C$. Podemos concluir que, como se demostró en el inciso (*b*), 1 no puede pertencer a C dado que contradice el axioma **(A4).**

P2. (6.0 ptos)

a) (3.0 ptos)

Solución: Para analizar la desigualdad es necesario primero, factorizar. La factorización vale 1 pto.

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{|x^2 - x - 6|} = \frac{(x-3)(x-2)}{|(x-3)(x+2)|} \tag{1}$$

Luego, para analizar el signo de la desigualdad es necesario identificar los puntos críticos. En este caso, los puntos críticos corresponden a $x = 3$, $x = 2$, $x = -2$. Por indicar los puntos críticos 0.5 pt.

Finalmente, como el denominador está en un valor absoluto, el signo de la desigualdad depende del signo producto que se encuentra en el numerador. Se analizará en las regiones indicadas por los puntos críticos:

- (0.3 pts) Si $x \in (-\infty, -2)$ entonces $x - 3 < 0$ y $x - 2 < 0$, por lo que se concluye que $(x-3)(x-2) > 0$.
- (0.3 pts) Si $x \in (-2, 2)$ entonces $x - 3 < 0$ y $x - 2 < 0$, por lo que se concluye que $(x-3)(x-2) > 0$.
- (0.3 pts) Si $x \in (2, 3)$ entonces $x - 3 < 0$ y $x - 2 > 0$, por lo que se concluye que $(x-3)(x-2) < 0$.
- (0.3 pts) Si $x \in (3, \infty)$ entonces $x - 3 > 0$ y $x - 2 > 0$, por lo que se concluye que $(x-3)(x-2) > 0$.

También podrían hacer una tabla en la siguiente forma (En este caso el puntaje es de 0.2 para cada columna correcta):

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
$(x-3)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$(x-2)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$(x-3)(x-2)$	$(+)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

Por lo tanto, en este caso podemos concluir que el conjunto solución es (la conclusión vale 0.3pts):

$$\text{intervalo semiabierto} \qquad [2, 3).$$

b) (3.0 ptos)

Solución: Para analizar la desigualda, podemos ver que, demostrar que $x^2 + y^2 \geq \sqrt{3}xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, es equivalente a mostrar que

$$x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy \geq 0 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Hasta aquí 0.3 pts. Si en el lado izquierdo de la ecuación completamos cuadrados se obtiene que $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy &= x^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}yx + \frac{3}{4}y^2 - \frac{3}{4}y^2 + y^2 \qquad \text{Sumamos cero convenientemente. (1pt).} \\ &= \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 + \frac{1}{4}y^2 \qquad \text{Reescribimos como el cuadrado del binomio. 1pt.} \\ &\geq 0 \qquad \text{Dado que} \quad a^2 \geq 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \qquad \text{0.7pts.} \end{aligned}$$

Existe la posibilidad que lo puedan demostrar de otra forma, en ese caso, por favor, distribuir el puntaje de forma equivalente, dependiendo de la resolución.

P3. (6.0 ptos)

a) (2.0 ptos)

Solución: Dada la información en el ejercicio, se tiene que las coordenadas del punto B se pueden escribir como $B = (-3x_a, y_b)$, por otra parte, como los puntos A, B están sobre la recta horizontal $y = c$, entonces podemos deducir que $y_a = y_b = c$, es decir

$$A = (x_a, c) \qquad B = (-3x_a, c).$$

(Esta primera deducción 0.5pt.)
Ahora como las rectas $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ son perpendiculares, significa que, si m_1 es la pendiente de la recta $\overrightarrow{PA}$ y m_2 es la pendiente de la recta $\overrightarrow{PB}$, entonces

$$m_1 \times m_2 = -1 \tag{3}$$

(Esta segunda deducción 0.5pt.)

Ahora, como la recta $\overrightarrow{PA}$ pasa por los punto P y A, y como la recta $\overrightarrow{PB}$ pasa por los punto P y B, entonces las pendiente de cada recta son respectivamente:

$$m_1 = \frac{y - c}{x - x_a} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{y - c}{x - (-3x_a)} \tag{4}$$

(Este paso 0.5 pts.)

Finalmente, usando la ecuación (3), obtenemos la ecuación que describe el lugar geométrico que describe el punto $P = (x, y)$:

$$\left(\frac{y - c}{x - x_a}\right)\left(\frac{y - c}{x + 3x_a}\right) = -1. \tag{5}$$

(Esta última deducción 0.5 pt.)

b) (2.0 ptos)

Solución: Para poder identificar el lugar geométrico, es necesario hacer algunas simplificacones que nos lleven a una ecuación conocida. Para ello, la ecuación (5) podemos reescribir:

$$\begin{aligned}
&(y-c)^2 = -(x-x_a)(x+3x_a), \\
&(y-c)^2 = -x^2 - 3xx_a + xx_a + 3x_a^2 \qquad \text{Distributiva} \\
&(y-c)^2 + x^2 + 2xx_a = 3x_a^2 \qquad \text{Simplifica. (Hasta aquí 0.7 pts.)} \\
&(y-c)^2 + x^2 + 2xx_a + +x_a^2 = 3x_a^2 + x_a^2 \qquad \text{Completar cuadrado} \\
&(y-c)^2 + (x+x_a)^2 = 4x_a^2 \quad \text{Binomio de la suma. (Las dos últimas lineas 0.7 pts)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto podemos concluir que el lugra geométrico que describe el punto $P = (x, y)$ es una circunferencia, centrada en el punto $(-x_a, c)$ de radio $r = 2x_a$. (La conclusión indicando centro y radio 0.6 pts.)

También es valido si encuentran la ecuación general de la circunferencia y luego usan las formulas dadas en clases para el centro y el radio. En ese caso, hacer la distribución de puntos de forma equivalente a lo mostrado antes!

c) (2.0 ptos)

Solución: Si $x_a = 2$ y $c = 1$ entonces la circunferencia es de centro (-2,1) y su radio es $r = 4$. (La indicación de los elementos 0.8 pts).
Un dibujo del lugar geométrico se puede ver a continuación (El dibujo 1.2 pts.):

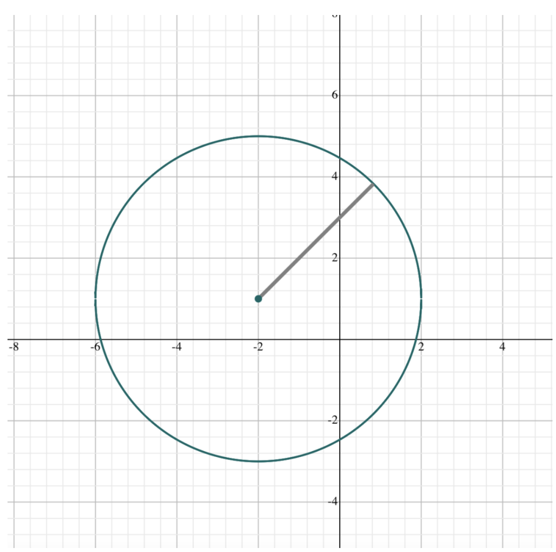

Figura 1: Circunferencia.