Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1001: Introducción al Cálculo Primavera 2024

Control 1

P1. Sea C un conjunto de números reales que satisface las siguientes propiedades (axiomas):

A1. $2 \in C$.
A2. Si $x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$.
A3. Si $x, y \in C$, entonces $x + y \in C$.
A4. $3 \notin C$.

Demuestre que se cumplen las siguientes propiedades, indicando qué axiomas, ya sea de los números reales o de los recién mencionados, utiliza:

(a) **(1.5 pts.)** $9 \in C$.
(b) **(1.5 pts.)** $1 \notin C$.
(c) **(1.5 pts.)** Si $x, y \in C$, entonces $3x + 1 + 3y \in C$.
(d) **(1.5 pts.)** Si $x \in C$, entonces $-x \notin C$.

P2. (a) **(3.0 pts.)** Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{|x^2 - x - 6|} \leq 0.$$

(b) **(3.0 pts.)** Sean x, y números reales. Usando los axiomas y propiedades de cuerpo y de orden de los números reales pruebe que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad x^2 + y^2 \geq \sqrt{3}xy.$$

Nota: Puede que le sea útil realizar una completación de cuadrado, para analizar la desigualdad.

P3. Considere el triángulo ABP tal que, los puntos $A = (x_a, y_a)$ y $B = (x_b, y_b)$ están sobre la recta $y = c$, $c \in \mathbb{R}$. Además, las primeras coordenadas de los puntos A y B (coordenadas en el eje x) están relacionadas de la siguiente forma:

$$x_b = -3x_a.$$

Si el triángulo ABP es un triángulo rectángulo en P, es decir, la recta $\overrightarrow{PA}$ es perpendicular a la recta $\overrightarrow{PB}$:

(a) **(2.0 pts.)** Plantee una ecuación para el lugar geométrico descrito por el punto $P = (x, y)$ en función de c y x_a.
(b) **(2.0 pts.)** Con la información obtenida en el inciso (a), identificar el lugar geométrico indicando todos los **parámetros importantes** (pendiente, centro, radio, semiejes, excentricidad, focos, directrices, asíntotas, etc. **según corresponda**).
(c) **(2.0 pts.)** Si tomamos $x_a = 2$ y $c = 1$, muestre un dibujo del lugar geométrico correspondiente, indicando los elementos básicos del mismo (**parámetros importantes**).

Tiempo: 3:00 horas.