Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1002: Cálculo Diferencial e Integral. 2024-2

Control 1

P1. a) Considere las parábolas $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \frac{x^2}{6} - 2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = 4 - \frac{x^2}{3}.$$

Estas dos curvas tienen dos intersecciones, en puntos que denotamos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, con $a > 0$.

i) **(0,5 pts.)** Encuentre explícitamente el valor de a.

ii) **(0,5 pts.)** Para cada $x \in (0, a)$, calcule el área $A(x)$ del rectángulo inscrito entre las dos parábolas, con lados paralelos a los ejes coordenados, y de lado horizontal de largo $2x$ (vea la figura).

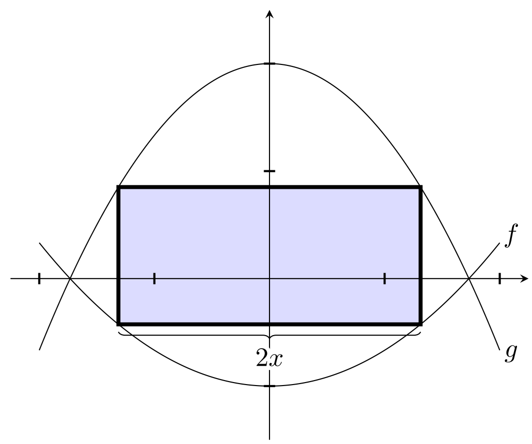

Figura 1: Esquema de un rectángulo inscrito.

iii) **(2,0 pts.)** Muestre que la función $A\colon (0, a) \to \mathbb{R}$ tiene un máximo global en algún punto $\bar{x} \in (0, a)$. Encuentre también el valor de $A(\bar{x})$, es decir, el área máxima de un rectángulo inscrito entre las parábolas, con lados paralelos a los ejes coordenados.

b) **(3,0 pts.)** Sea $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[-1, 1]$, derivable en $(-1, 1)$, y tal que g' es continua en $(-1, 1)$. Suponga además que:

$$g(0) = 2, \quad g(1) = 0, \quad \text{y} \quad g'(0) = -1.$$

Usando el teorema del valor medio (TVM) y el teorema de los valores intermedios (TVI), demuestre que existe un punto $\xi \in (-1, 1)$ tal que:

$$g'(\xi) = -\frac{3}{2}.$$

P2. a) **(3,0 pts.)** Sea $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Determine si f es uniformemente continua en $(0,1]$.

b) **(3,0 pts.)** Sea $c \in \mathbb{R}$ un número real fijo. Demuestre que la ecuación

$$(x+1)\ln(x) = c,$$

donde $x \in (0,+\infty)$ es la incógnita, tiene al menos una solución en $(0,+\infty)$.
Indicación: Considere separadamente los casos $c = 0$ y $c \neq 0$, y el punto $x = e^c$.

P3. Considere la función $f\colon (-2,\pi) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} & x \in (-2,0) \\ 0 & x = 0 \\ \operatorname{sen}(x) & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

a) **(1,5 pts.)** Determine dónde f es derivable, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in (-2,\pi)$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

b) **(1,5 pts.)** Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos locales y máximos locales de f.

c) **(1,5 pts.)** Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in (-2,\pi)$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.

d) **(1,5 pts.)** Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

Si usa un teorema, no olvide verificar explícitamente cada una de sus hipótesis.

Duración: 3h.