Pauta de corrección Control 1

P1. a) Considere las parábolas $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \frac{x^2}{6} - 2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = 4 - \frac{x^2}{3}.$$

Estas dos curvas tienen dos intersecciones, en puntos que denotamos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, con $a > 0$.

i) **(0,5 pts.)** Encuentre explícitamente el valor de a.

Solución

El punto de intersección corresponde a aquel $a > 0$ en el que $f(a) = g(a)$.

(0,2 pts. por plantear la ecuación)

Se calcula entonces

$$4 - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{6} - 2 \iff \frac{a^2}{2} = 6 \iff a^2 = 12 \iff a = 2\sqrt{3},$$

donde se descartó la solución negativa porque $a > 0$.

(0,3 pts. por resolver la ecuación)

Alternativa

Como el enunciado asegura que los puntos de intersección son de la forma $(\pm a, 0)$, también es posible imponer $f(a) = 0$ o $g(a) = 0$ y resolver para a de esta manera. Si se siguiera este método, se debe argumentar que efectivamente $(a, 0)$ es una interseccón (ya sea diciendo que se encontró una sola solución con $a > 0$ y el enunciado asegura su existencia, así que deben ser esa; o evaluando el valor encontrado para a en la otra función y notando que también se anula).

ii) **(0,5 pts.)** Para cada $x \in (0, a)$, calcule el área $A(x)$ del rectángulo inscrito entre las dos parábolas, con lados paralelos a los ejes coordenados, y de lado horizontal de largo $2x$ (vea la figura).

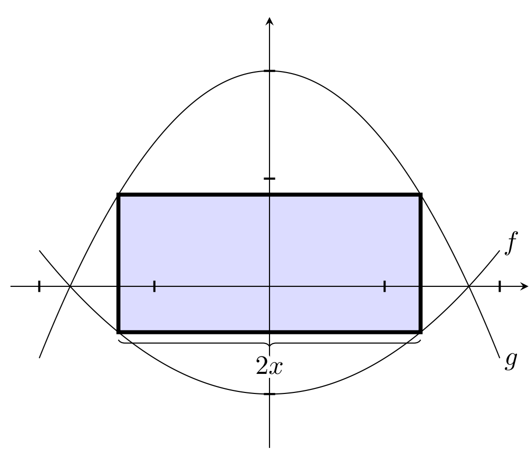

Figura 1: Esquema de un rectángulo inscrito.

Solución

Por hipótesis, la base del rectángulo es $2x$. De la figura, se observa que la altura del rectángulo es $g(x) - f(x)$.

(0,2 pts. por determinar el valor de la altura)

Así:

$$A(x) = 2x \cdot (g(x) - f(x)) = \left[\left(4 - \frac{x^2}{3}\right) - \left(\frac{x^2}{6} - 2\right)\right] = 2x \cdot \left(6 - \frac{x^2}{2}\right) = 12x - x^3.$$

(0,3 pts. por calcular el área)

iii) **(2,0 pts.)** Muestre que la función $A\colon (0, a) \to \mathbb{R}$ tiene un máximo global en algún punto $\bar{x} \in (0, a)$. Encuentre también el valor de $A(\bar{x})$, es decir, el área máxima de un rectángulo inscrito entre las parábolas, con lados paralelos a los ejes coordenados.

Solución

Se debe encontrar el valor $\bar{x} \in (0, 2\sqrt{3})$ que maximiza a A. Para esto, se encuentran los puntos críticos de A, observando primero que es derivable porque es un polinomio.

(0,3 pts. por justificar que A es derivable)

Se tiene que:

$$A'(x) = 12 - 3x^2 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = 2,$$

donde se descartó la solución nula y la solución negativa porque el dominio de A es $(0, 2\sqrt{3})$. Así, A tiene un solo punto crítico, en $\bar{x} = 2$.

(0,3 pts. por encontrar el único punto crítico de A)

Para mostrar que A es un máximo global, se pueden usar dos métodos:

Primera forma (usando la caracterización de puntos críticos)

Como A es infinitamente derivable por ser un polinomio, se puede usar la caracterización de puntos críticos.

(0,3 pts. por justificar que A es infinitamente derivable)

Se tiene que $A''(x) = -6x$.

(0,2 pts. por calcular A'')

Evaluando, resulta que $A''(2) = -12 < 0$, lo que muestra que $\bar{x} = 2$ es un máximo local.

(0,4 pts. por concluir que $\bar{x} = 2$ es un máximo local)

Se concluye entonces que A es estrictamente creciente antes de $\bar{x} = 2$, y estrictamente decreciente después de $\bar{x} = 2$, ya que $\bar{x} = 2$ es un máximo local y no hay más puntos críticos (así que $A'(x)$ no es nula si $x \neq 2$).

(0,4 pts. por determinar el crecimiento de A antes y después de $\bar{x} = 2$)

Así, se concluye que $A(2) > A(x)$ para todo $x \in (0, 2)$ y que $A(2) > A(x)$ para todo $x \in (2, 2\sqrt{3})$, lo que muestra que $\bar{x} = 2$ es un máximo global.

(0,2 pts. por concluir que $\bar{x} = 2$ es un máximo global)

Segunda forma (analizando directamente el crecimiento de A)

Se tiene que

$$A'(x) > 0 \iff 12 - 3x^2 > 0 \iff x^2 < 4 \iff x \in (0, 2),$$

donde se descartaron las soluciones negativas porque el dominio de A es $(0, 2\sqrt{3})$.

(0,5 pts. por determinar dónde A' es positiva)

Por lo tanto, A es estrictamente creciente en $(0, 2)$, y estrictamente decreciente en $(2, 2\sqrt{3})$.

(0,5 pts. por determinar el crecimiento de A)

Por definición, esto significa que $A(2) > A(x)$ para todo $x \in (0, 2)$ y que $A(2) > A(x)$ para todo $x \in (2, 2\sqrt{3})$, lo que muestra que $\bar{x} = 2$ es un máximo global.

(0,2 pts. por concluir que $\bar{x} = 2$ es un máximo global)

Finalmente, se calcula

$$A(\bar{x}) = A(2) = 12 \cdot 2 - 2^3 = 16.$$

(0,2 pts. por hacer este cálculo)

b) **(3,0 pts.)** Sea $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[-1, 1]$, derivable en $(-1, 1)$, y tal que g' es continua en $(-1, 1)$. Suponga además que:

$$g(0) = 2, \quad g(1) = 0, \quad \text{y} \quad g'(0) = -1.$$

Usando el teorema del valor medio (TVM) y el teorema de los valores intermedios (TVI), demuestre que existe un punto $\xi \in (-1, 1)$ tal que:

$$g'(\xi) = -\frac{3}{2}.$$

Solución

Se tiene que g es continua en el intervalo $[-1, 1]$ y derivable en $(-1, 1)$, por lo que se puede usar el teorema del valor medio (TVM).

(0,5 pts. por justificar las hipótesis del teorema del valor medio)

Este teorema garantiza la existencia de un punto $\xi_1 \in (-1, 1)$ tal que

$$g'(\xi_1) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = -2.$$

(0,5 pts. por usar el teorema del valor medio)

Por otro lado, dado que g' es continua en $(-1, 1)$, también es continua en $[0, \xi_1] \subseteq (-1, 1)$.

(0,5 pts. por justificar que g' es continua en $[0, \xi_1]$)

Por lo tanto, se puede usar el teorema de los valores intermedios (TVI) en el intervalo $[0, \xi_1]$.

(0,5 pts. por justificar las hipótesis del teorema de los valores intermedios)

Como g toma los valores $g'(0) = -1$ y $g'(\xi_1) = -2$, este teorema nos asegura que existe $\xi \in [0, \xi_1]$ tal que $g'(\xi) = c$, para cualquier $c \in [-2, -1]$.

(0,5 pts. por usar el teorema de los valores intermedios)

En particular, tomando $c = -\frac{3}{2}$, se obtiene lo solicitado.

(0,5 pts. por concluir)

Alternativa

También es posible definir la función auxiliar $h \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ por $h(x) = g'(x) - \left(-\frac{3}{2}\right)$, argumentar que h es continua porque g' lo es (al ser derivable), y mostrar que h cambia de signo en el intervalo $[-1, \xi_1]$. Así, el teorema de los valores intermedios (TVI) asegura la existencia del punto buscado.

P2. a) **(3,0 pts.)** Sea $f \colon (0, 1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Determine si f es uniformemente continua en $(0, 1]$.

Solución

Se debe probar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in (0, 1], \left[|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\right],$$

es decir, que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in (0, 1], \left[|x - y| \leq \delta \implies |\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| \leq \varepsilon\right].$$

(0,5 pts. por escribir correctamente la definición de continuidad uniforme y aplicarla a f)

Se define la función auxiliar $g \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = \operatorname{sen}(x)$.

(0,5 pts. por definir la función auxiliar)

Esta función es conocidamente continua en $\mathbb{R}$, y, en particular, en $[0, 1]$.

(0,5 pts. por decir que g es continua)

Además, como g está definida en un intervalo cerrado y acotado, por un teorema visto en clases es uniformemente continua en su dominio $[0, 1]$.

(0,5 pts. usar el teorema para concluir que g es uniformemente continua)

Esto significa que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [0, 1], \left[|x - y| \leq \delta \implies |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon\right].$$

Como $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, resulta:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [0, 1], \left[|x - y| \leq \delta \implies |\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| \leq \varepsilon\right].$$

(0,5 pts. por aplicar la definición de continuidad uniforme aplicarla a g)

Finalmente, como la afirmación anterior se cumple para todo $x, y \in [0,1]$, en particular también se cumple para todo $x, y \in (0,1]$. Así, se obtiene que:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in (0,1],\ [|x-y| \leq \delta \implies |\text{sen}(x) - \text{sen}(y)| \leq \varepsilon],$$

que es precisamente lo buscado.

(0,5 pts. por concluir que f también es uniformemente continua)

b) **(3,0 pts.)** Sea $c \in \mathbb{R}$ un número real fijo. Demuestre que la ecuación

$$(x+1)\ln(x) = c,$$

donde $x \in (0, +\infty)$ es la incógnita, tiene al menos una solución en $(0, +\infty)$.

Indicación: Considere separadamente los casos $c = 0$ y $c \neq 0$, y el punto $x = e^c$.

Solución

Se comienza considerando la función auxiliar $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x+1)\ln(x) - c$.

(0,3 pts. por definir la función auxiliar)

Para demostrar que la ecuación tiene solución, se mostrará que f tiene un cero, es decir, que existe $\bar{x} \in (0, \infty)$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.

(0,4 pts. por reducir el problema a encontrar un cero de f)

Se observa primero que f es continua por ser el producto de un polinomio y la función logaritmo natural, menos una constante.

(0,4 pts. por justificar que f es continua)

Por lo tanto, por el teorema de los valores intermedios, basta mostrar que f cambia de signo para probar que tiene un cero.

(0,4 pts. por reducir el problema a mostrar que f cambia de signo)

Para demostrar que f cambia de signo, se pueden seguir dos métodos:

Primera forma (siguiendo la indicación)

Primero se observa que

$$f(e^c) = (e^c + 1)\ln(e^c) - c = (e^c + 1)c - c = ce^c$$

(0,3 pts. por calcular $f(e^c)$)

y que

$$f(1) = (1+1)\ln(1) - c = -c.$$

(0,3 pts. por calcular $f(1)$)

Si $c = 0$, esto muestra que la ecuación tiene solución $x = 1$.

(0,4 pts. por encontrar una solución cuando $c = 0$)

Si $c \neq 0$, como e^c es positivo, $f(e^c)$ siempre tiene el mismo signo que c, y $f(1)$ siempre tiene signo contrario que c. Por lo tanto, f cambia de signo en el intervalo $[e^c, 1]$ (si $e^c < 1$) o $[1, e^c]$ (si $e^c > 1$).

(0,5 pts. por mostrar que f cambia de signo cuando $c \neq 0$)

Segunda forma (analizando el comportamiento hacia 0^+ y $+\infty$)

Se verá que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

pues esto significa que en algún momento la función debe ser negativa, y en algún momento, positiva. Se calcula entonces:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} ((x+1)\ln(x) - c) = \left(\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)\right) + \left(\lim_{x\to 0^+} \ln(x)\right) - c$$

Se tiene que

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{u\to\infty} -u\exp(-u) = \lim_{u\to\infty} -\frac{u}{\exp(u)} = 0$$

donde se hizo el cambio de variable $x = \exp(-u)$ y usamos el límite conocido $\lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{u}{\exp(u)} = 0$. Así,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty + 0 - c = -\infty,$$

donde se usó el límite conocido $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

(1,0 pto. por calcular el límite hacia 0^+)

Finalmente,

$$\lim_{x\to\infty} (x+1)\ln(x) = \left(\lim_{x\to\infty} x\right)\left(\lim_{x\to\infty} \ln(x)\right) + \left(\lim_{x\to\infty} \ln(x)\right) = \infty\cdot\infty + \infty = \infty.$$

(0,5 pts. por calcular el límite hacia ∞)

P3. Considere la función $f\colon (-2,\pi) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} & x \in (-2,0) \\ 0 & x = 0 \\ \operatorname{sen}(x) & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

a) **(1,5 pts.)** Determine dónde f es derivable, calcule f' donde f sea derivable y encuentre todos los puntos $\bar{x} \in (-2,\pi)$ donde $f'(\bar{x}) = 0$.

Solución

Si $x < 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(y) = \dfrac{y}{y^2+1}$ para todo $y \in (x-\delta, x+\delta)$ (por ejemplo, $\delta = -x$). Como esta última expresión es una función racional con denominador que nunca se anula, f es derivable en x.

(0,2 pts. por justificar que f es derivable en $x < 0$)

Se tiene además que

$$f'(x) = \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

(0,2 pts. calcular f' en $x < 0$)

Similarmente, si $x > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(y) = \operatorname{sen}(y)$ para todo $y \in (x-\delta, x+\delta)$ (por ejemplo, $\delta = x$). Esta última expresión es conocidamente derivable, y se tiene que $f'(x) = \cos(x)$.

(0,3 pts. por justificar que f es derivable en $x > 0$ y calcular su derivada)

Finalmente, f también es derivable en $x = 0$, pero para determinar esto se debe usar la definición:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}.$$

(0,1 pts. por plantear este límite)

Se continúa calculando los límites laterales:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\dfrac{h}{h^2+1}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h^2+1} = 1,$$

donde se usó la continuidad de la función $\dfrac{1}{h^2+1}$ en $\bar{h} = 0$.

(0,1 pts. por calcular este límite lateral)

Además,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1,$$

ya que este último límite es conocido.

(0,1 pts. por calcular este límite lateral)

Se concluye entonces que ambos límites laterales coinciden y son iguales a 1, de donde $f'(0)$ existe y es igual a 1.

(0,1 pts. por mostrar que $f'(0) = 1$)

De este modo, resulta que

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & x \in (-2,0) \\ 1 & x = 0 \\ \cos(x) & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

(0,1 pts. por encontrar f')

Se encontrarán ahora los puntos $\bar{x} \in \mathbb{R}$ donde $f'(\bar{x}) = 0$. Se observa primero que $f'(0) = 1$, así que cualquier $\bar{x}$ que lo cumpla debe ser no nulo.

(0,1 pts. por mostrar que 0 no es un punto crítico)

Si $\bar{x} < 0$, se busca $\bar{x} \in (-2,0)$ tal que $\dfrac{1-\bar{x}^2}{(\bar{x}^2+1)^2} = 0$. Sin restricciones, esta última ecuación tiene soluciones ± 1, y, de estas dos, la única que pertenece al intervalo $(-2,0)$ es $\bar{x} = -1$.

(0,1 pts. por encontrar los puntos críticos negativos)

Si $\bar{x} > 0$, se busca $\bar{x} \in (0,\pi)$ tal que $\cos(\bar{x}) = 0$, y el único punto que lo cumple es $\bar{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

(0,1 pts. por encontrar los puntos críticos positivos)

Se concluye entonces los puntos críticos de f son $\bar{x} = -1$ y $\bar{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

b) **(1,5 pts.)** Encuentre los intervalos (si los hay) donde f es creciente y donde es decreciente. Indique (si los hay) cuáles son los puntos de mínimos locales y máximos locales de f.

Solución

Para determinar los intervalos de monotonía de f, se debe determinar el signo de f'.

(0,3 pts. por decir que basta con estudiar el signo de f')

Se observa primero que, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} > 0 \iff 1-x^2 > 0 \iff x^2 < 1,$$

ya que el término $(x^2+1)^2$ es siempre positivo. Esto se cumple si y solo si $x \in (-1,1)$.

(0,3 pts. por determinar dónde $\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ es positiva)

Ahora, si $x < 0$ se tiene que $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, de donde f' es positiva en el intervalo $(-1,0)$, y negativa en el intervalo $(-2,-1)$. Por lo tanto, f es creciente en el intervalo $(-1,0)$, y decreciente en el intervalo $(-2,-1)$.

(0,3 pts. por encontrar dónde f es creciente y dónde es decreciente si $x < 0$)

Similarmente, se sabe que $\cos(x) > 0$ si $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, y que $\cos(x) < 0$ si $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$. Así, f' es positiva en el intervalo $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, y negativa en el intervalo $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$. Por lo tanto, f es creciente en el intervalo $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, y decreciente en el intervalo $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.

(0,3 pts. por encontrar dónde f es creciente y dónde es decreciente si $x > 0$)

Como además $f'(0) = 1 > 0$, combinando esto con el análisis anterior se observa que en realidad f' es positiva en todo el intervalo $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$.
Esto se resume en la siguiente tabla de monotonía:

$-2 \qquad -1 \qquad \pi/2 \qquad \pi$

$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘

Tabla 1: Tabla de monotonía de f.

Finalmente, se determinará si los puntos críticos encontrados anteriormente son mínimos o máximos. Se tiene que f es decreciente hasta $\bar{x} = -1$, y luego creciente justo después de $\bar{x} = -1$, lo que muestra que $\bar{x} = -1$ es un mínimo local. Similarmente, se tiene que f es creciente justo antes de $\bar{x} = \dfrac{\pi}{2}$, y decreciente después de $\bar{x} = \dfrac{\pi}{2}$, lo que muestra que $\bar{x} = \dfrac{\pi}{2}$ es un máximo local.

(0,3 pts. por argumentar que $\bar{x} = -1$ es un mínimo local y que $\bar{x} = \dfrac{\pi}{2}$ es un máximo local)

Alternativa

También es posible argumentar usando la caracterización de puntos críticos. Se debe argumentar que f' es derivable y calcular su derivada (o decir que si hizo en la parte siguiente, si es que se hizo correctamente). Se tiene así que

$$f''(-1) = \frac{2 \cdot (-1)((-1)^2 - 3)}{((-1)^2 + 1)^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0,$$

de donde $\bar{x} = -1$ es un mínimo local, y que

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0,$$

de donde $\bar{x} = \dfrac{\pi}{2}$ es un máximo local.

c) **(1,5 pts.)** Determine dónde f es dos veces derivable, calcule f'' allí, y calcule todos los puntos $\bar{x} \in (-2, \pi)$ donde $f''(\bar{x}) = 0$.

Solución

De manera similar al cálculo de f', se separa el análisis en los casos $x < 0$, $x = 0$ y $x > 0$.
Si $x < 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f'(y) = \dfrac{1 - y^2}{(y^2 + 1)^2}$ para todo $y \in (x - \delta, x + \delta)$ (por ejemplo, $\delta = -x$).

(0,2 pts. por justificar que f es derivable en $x < 0$)

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(1 - x^2)'(x^2 + 1)^2 - (1 - x^2)((x^2 + 1)^2)'}{(x^2 + 1)^4} = \frac{(-2x) \cdot (x^2 + 1)^2 - (1 - x^2) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} \\ &= \frac{2x \cdot (x^2 + 1)(-(x^2 + 1) - 2(1 - x^2))}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}. \end{aligned}$$

(0,3 pts. por calcular f'' en $x < 0$)

Por otro lado, si $x > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f'(y) = \cos(y)$ para todo $y \in (x - \delta, x + \delta)$ (por ejemplo, $\delta = x$).
Por lo tanto, $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$.

(0,2 pts. por calcular f'' en $x > 0$ y calcular su derivada)

Finalmente, f' también es derivable en $x = 0$, pero en este caso se debe hacer el cálculo por definición. Se tiene que

$$f''(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(0 + h) - f'(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(h) - 1}{h}.$$

(0,1 pts. por plantear este límite)

Nuevamente se separa el cálculo en límites laterales:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f'(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\dfrac{1-h^2}{(1+h^2)^2}-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1-h^2)-(1+h^2)^2}{h(1+h^2)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{(1-h^2)-(1+2h^2+h^4))}{h(1+h^2)^2} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-3h^2-h^4}{h(1+h^2)^2} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-3h-h^3}{(1+h^2)^2} = 0,$$

donde se usó la continuidad de la función $\dfrac{-3h-h^3}{(1+h^2)^2}$ en $\bar{h}=0$.

(0,2 pts. por calcular este límite lateral)

Además,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f'(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0,$$

ya que este es un límite conocido.

(0,1 pts. por calcular este límite lateral)

De este modo, resulta que

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} & x \in (-2,0) \\ 0 & x = 0 \\ -\operatorname{sen}(x) & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

(0,1 pts. por encontrar f'')

Se buscan ahora los puntos $\bar{x} \in (-2,\pi)$ tales que $f''(\bar{x}) = 0$. Como ya se vio, $f''(0) = 0$, así que $\bar{x} = 0$ es una solución posible.

(0,1 pts. por encontrar que $f''(0) = 0$)

Ahora, si $x \in (-2,0)$, se tiene que

$$f''(x) = 0 \iff \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0 \iff x(x^2-3) = 0 \iff x = -\sqrt{3}$$

donde se descartaron la solución nula y positiva porque $x < 0$. Se concluye entonces que el único punto $\bar{x} < 0$ con $f''(\bar{x}) = 0$ es $\bar{x} = -\sqrt{3}$.

(0,1 pts. por encontrar que $f''(-\sqrt{3}) = 0$)

Finalmente, si $x \in (0,\pi)$ se tiene que

$$f''(x) = 0 \iff -\operatorname{sen}(x) = 0 \iff \operatorname{sen}(x) = 0$$

no tiene solución, pues la función seno es estrictamente positiva en $(0,\pi)$.

(0,1 pts. por encontrar que f'' no se anula en $(0,\pi)$)

d) **(1,5 pts.)** Determine los intervalos donde f es convexa y donde es cóncava (si los hay).

Solución

Para determinar dónde f es cóncava y dónde es convexa, se debe calcular el signo de f''.

(0,3 pts. por decir que basta con estudiar el signo de f'')

Se observa primero que, si $x < 0$,

$$\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} > 0 \iff x(x^2-3) > 0 \iff x^2-3 < 0 \iff x^2 < 3$$

ya que el término $(x^2+1)^3$ es siempre positivo.

(0,4 pts. por llegar a esta desigualdad)

Se concluye que f'' es negativa en el intervalo $(-2,-\sqrt{3})$, y positiva en el intervalo $(-\sqrt{3},0)$. Por lo tanto, f es cóncava en el intervalo $(-2,-\sqrt{3})$, y convexa en el intervalo $(-\sqrt{3},0)$

(0,4 pts. por encontrar dónde f es cóncava y dónde es convexa si $x < 0$)

Se verá ahora qué ocurre para $x > 0$. Se sabe que $-\operatorname{sen}(x) < 0$ para todo $x \in (0,\pi)$. Por lo tanto, f'' es negativa en el intervalo $(0,\pi)$, y f es cóncava en el intervalo $(0,\pi)$.

(0,4 pts. por encontrar dónde f es cóncava y dónde es convexa si $x > 0$)

Esto se resume en la siguiente tabla de convexidad:

	-2	$-\sqrt{3}$	0	π
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$	$\frown$	$\smile$	$\frown$	

Tabla 2: Tabla de convexidad de f.