Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1001: Introducción al Cálculo 2024-1

Pauta de la Propuesta Control-2 Recuperativo

P1. Considere la parábola de ecuación $y^2 = 4x$, cuyo foco lo denotaremos por F y sea P un punto que se mueve en ella. Sea B la proyección de P sobre el eje OY. Sea $M = (x_M, y_M)$ la intersección de las rectas $\overleftrightarrow{OP}$ y $\overleftrightarrow{BF}$.

(a) **[2 puntos]** Si el punto $P = (x_0, y_0) \neq (0,0)$, entonces demuestre que $\dfrac{y_M}{x_M} = \dfrac{y_0}{x_0}$.

Solución: Si el punto de la parábola es $P = (x_0, y_0)$ no es el origen, entonces $x_0 \neq 0$ y $y_0 \neq 0$. Además notamos que como $x_0 = \dfrac{1}{4}y_0^2$, entonces $x_0 > 0$, y por lo tanto $x_0 + 1 \neq 0$. La ecuación de la recta $\overleftrightarrow{OP}$, es $y = \dfrac{y_0}{x_0}x$. Dado que el foco de la parábola es $F = (1,0)$, se tiene que la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{BF}$, es $y = y_0(1-x)$.

Asignar 1 punto por encontrar las ecuaciones de ambas rectas.

Entonces x_M, satisface la ecuación

$$\frac{y_0}{x_0}x_M = y_0(1 - x_M)$$

Como $y_0 \neq 0$, se tiene que:

$$\frac{1}{x_0}x_M = 1 - x_M$$

$$x_M\left(1 + \frac{1}{x_0}\right) = 1$$

$$x_M = \frac{x_0}{1 + x_0}$$

Reemplazando en la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{OP}$, se tiene que

$$y_M = \frac{y_0}{x_0} \times \frac{x_0}{1+x_0} = \frac{y_0}{1+x_0}$$

Asignar 1/2 punto por encontrar las coordenadas de M.

Por lo tanto

$$\frac{y_M}{x_M} = \frac{\frac{y_0}{1+x_0}}{\frac{x_0}{1+x_0}} = \frac{y_0}{x_0}.$$

Asignar 1/2 punto por la igualdad entre el cociente de las coordenadas de P y el cociente de las coordenadas de M.

(b) **[1 punto]** Demuestre que $4x_M^2 + y_M^2 = 4x_M$

Solución: Considerando los valores de la parte anterior, tenemos que

$$4x_M^2 + y_M^2 = \frac{4x_0^2}{(1+x_0)^2} + \frac{y_0^2}{(1+x_0)^2}$$

Como $P = (x_0, y_0)$ es un punto de la parábola se tiene que $y_0^2 = 4x_0$, por lo tanto se tiene que:

$$4x_M^2 + y_M^2 = \frac{4x_0^2}{(1+x_0)^2} + \frac{4x_0}{(1+x_0)^2} = \frac{4(x_0^2 + x_0)}{(1+x_0)^2}$$

Asignar 1/2 punto por haber reemplazado $y_0^2 = 4x_0$ en la igualdad.

$$4x_M^2 + y_M^2 = \frac{4x_0(x_0+1)}{(x_0+1)^2}$$

$$4x_M^2 + y_M^2 = \frac{4x_0}{(x_0+1)} = 4x_M.$$

Asignar 1/2 punto por haber factorizado y cancelado, para obtener $4x_M$.

(c) **[3 puntos]** Determine el lugar geométrico de todos los punto M. Si resulta una cónica, determine sus elementos principales (foco, directríz, vértices, centro, excentricidad).

Solución: De la ecuación anterior, tenemos que:

$$4x_M^2 - 4x_M + y_M = 0$$

$$4(x_M^2 - x_M) + y_M^2 = 0$$

$$4\left(x_M^2 - x_M + \frac{1}{4}\right) + y_M = 1$$

$$4\left(x_M - \frac{1}{2}\right)^2 + y_M^2 = 1$$

$$\frac{\left(x_M - \frac{1}{2}\right)^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{y_M^2}{1^2} = 1$$

Que corresponde a una elipse, con semieje mayor paralelo al eje OY y eje menor paralelo al eje OX.

Asignar 1 punto por haber escrito la ecuación canónica de la elipse y reconocerla como tal.

Su centro es el punto $C = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Sus vértices son $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $(0,0)$, $(1,0)$.

Asignar 3/4 puntos por haber descrito el centro y al menos 2 vértices del mismo eje.

Su excentricidad es $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Sus focos son $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.

Asignar 3/4 puntos por haber descrito la excentricidad y al menos uno de los focos.

Sus directrices son las rectas $D_1 : y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ y $D_2 : y = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}$

Asignar 1/2 punto por haber descrito al menos una de las directrices.

P2. Considere la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|+1} & \text{si } |x| \leq 1 \\ \\ \frac{1}{2}x^3 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

(a) **[2 puntos]** Determine $\mathrm{Dom}(f)$, ceros, signos y paridad de f.

Solución: Dado que $1 + |x| \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ y $\frac{1}{2}x^3$ es un polinomio, y por lo tanto definido para todo número real. Se tiene que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Asignar 1/2 punto por haber determinado el dominio de f.

Notamos que $\frac{1}{2}x^3$ no es cero si $|x| > 1$. Entonces el único cero de la función, ocurre cuando $\dfrac{1}{|x|+1} = 0$, y esto es en $x = 0$.

Asignar 1/2 punto por haber encontrado los ceros de f.

La función es positiva en $(0, \infty)$ y es negativa en $(-\infty, 0)$.

Asignar 1/2 punto por haber descrito los signos de f.

Si $x \in [-1, 1]$, entonces $-x \in [-1, 1]$ y además

$$f(-x) = \frac{-x}{|-x|+1} = \frac{-x}{|x|+1} = -f(x)$$

Si $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, entonces $-x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, además

$$f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^3 = \frac{1}{2}(-x^3) = -\frac{1}{2}x^3 = -f(x)$$

Entonces f es impar.

Asignar 1/2 punto por haber determinado que f es impar.

(b) **[2 puntos]** Estudie intervalos de crecimiento o decrecimiento de f. Determine el conjunto imagen de f (o sea $Im(f)$ o $Rec(f)$ que es lo mismo), resolviendo explícitamente la ecuación $y = f(x)$

Solución: Sea $0 \leq u < v \leq 1$, entonces

$$f(v) - f(u) = \frac{v}{v+1} - \frac{u}{u+1} = \frac{v-u}{(v+1)(u+1)}$$

El último cociente, tiene un numerador positivo y un denominador positivo, por lo tanto $f(v) - f(u) > 0$, es decir, $f(u) < f(v)$.

Asignar 1/4 punto por haber determinado el crecimiento de f en $[0, 1]$.

Si $1 < u < v$, entonces

$$f(v) - f(u) = \frac{1}{2}(v^3 - u^3) = \frac{1}{2}(v - u)(v^2 + uv + u^2)$$

Como $u^2 + uv + v^3 > 0$ y $v - u > 0$, se tiene que $f(u) < f(v)$.

Asignar 1/4 punto por haber determinado el crecimiento de f en $(1, \infty)$.

Por último, si $0 \leq u \leq 1 < v$, entonces $0 \leq f(u) \leq \frac{1}{2}$ y $f(v) > \frac{1}{2}$.

Entonces, si $0 \leq u < v$, entonces $f(u) < f(v)$, es decir f es estrictamente creciente en $[0, \infty)$

Asignar 1/4 punto por haber determinado el crecimiento de f en $[1, \infty)$.

y por imparidad de f, la función f es estrictamente creceinte en todo $\mathbb{R}$.

Asignar 1/4 punto por haber determinado el crecimiento de f en $\mathbb{R}$.

Afirmamos que $Im(f) = \mathbb{R}$. Probaremos que todo número real tiene preimagen.
Sea $y \in [0, \frac{1}{2}]$. Buscamos x positivo y menor que 1, tal que $f(x) = y$. Es decir, $\frac{x}{1+x} = y$.

$$1 - \frac{1}{1 + x} = y$$

$$1 - y = \frac{1}{1 + x}$$

Notamos que como $0 \leq y < \frac{1}{2}$, entonces $1 - y > 0$. Por lo tanto

$$\frac{1}{1 - y} = 1 + x$$

$$\frac{1}{1 - y} - 1 = x$$

$$x = \frac{y}{1 - y}$$

Claramente $x > 0$, si $x > 1$, se obtiene que $y > 1/2$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto si $0 \leq x = \frac{y}{1-y} \leq 1$, es preimagen de y vía f. Ahora si $y > \frac{1}{2}$, se tiene que $2y > 1$, entonces $\sqrt[3]{2y} = x > 1$, y x es la preimagen de y. Por imparidad de f se tiene que $Im(f) = \mathbb{R}$.

Asignar 1 punto por haber determinado el conjunto imagen de f.

(c) **[2 puntos]** Muestre que f inyectiva en su dominio y determine explicitamente $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Dom}\, f$.

Solución: Por la parte anterior, tenemos que f es estrictamente creciente, por lo tanto f es inyectiva en $\mathbb{R}$.

Asignar 3/4 punto por haber argumentado que f es inyectiva.

Entonces, de nuevo por los cálculos de la parte anterior, la función inversa de $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \\ \frac{x}{1+x} & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ \\ \sqrt[3]{2x} & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

También se puede escribir:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-|x|} & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ \\ \sqrt[3]{2x} & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Asignar 5/4 punto por haber determinado explicitamente f^{-1}.

Tiempo: 1:30 horas.